

Paley - Wiener - Schwarz

Théorème: 1) Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, d'ordre N_0 , telle que $\text{supp } T \subset [-\pi; \pi]$. Il existe alors $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe telle que $F|_{\mathbb{R}} = \hat{T}$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $|F(z)| \leq C(1+|z|)^{N_0} e^{x|\text{Im } z|}$ (*)
 2) Réciproquement, soit $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe vérifiant (*). Alors il existe $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp } T \subset [-\pi; \pi]$ et $\hat{T}(y) = F(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Démonstration: 1) a) Soit $F(z) = \langle T; e^{iz \cdot} \rangle$. On a alors, comme $z \mapsto e^{iz \cdot}$ est holomorphe pour tout x que F est C^1 et que $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \langle T; \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(e^{iz \cdot}) \rangle = 0$.
 Donc F est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $F|_{\mathbb{R}} = \hat{T}$.

De plus, T est d'ordre N_0 et à support dans $[-\pi; \pi]$. Donc si $K_\varepsilon = [-(\pi+\varepsilon); (\pi+\varepsilon)]$, il existe C tel que $\forall \varepsilon > 0$, $|F(z)| \leq C \sum_{x \in N_0} \sup_{K_\varepsilon} |\partial_x^x (e^{-izx})| \leq C \sum_{x \in N_0} |z|^x e^{(\pi+\varepsilon)|\text{Im } z|} \leq C'(1+|z|)^{N_0} e^{(\pi+\varepsilon)|\text{Im } z|}$

Faisant tendre ε vers 0, il vient que F vérifie (*).

b) Si de plus, $T \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists C_N > 0$ / $|F(z)| \leq \frac{C_N}{(1+|z|)^N} e^{x|\text{Im } z|}$ (**)

Dans ce cas, $F(z) = \int_{\mathbb{R}} T(x) e^{-izx} dx$ et $\forall k \in \mathbb{N}$,
 $(-iz)^k F(z) = \int_{\mathbb{R}} T(x) (-iz)^k e^{-izx} dx = \int_{\mathbb{R}} T(x) \frac{d^k}{dx^k} (e^{-izx}) dx = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} T^{(k)}(x) e^{-izx} dx$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $|F(z)| \leq \frac{1}{|z|^k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\text{Im } z x} |T^{(k)}(x)| dx \leq \frac{e^{x|\text{Im } z|}}{|z|^k} \int_{-\pi}^{\pi} |T^{(k)}(x)| dx$ (IPP) (multiplicité au bord)
 qui prouve la 1/b).

2) Si F vérifie (**), alors $\exists \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [-\pi; \pi]$ et $\hat{\varphi} = F|_{\mathbb{R}}$.

Posons $\varphi: t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} F(x) dx$.

Du fait que F vérifie (**), $x \mapsto e^{itx} F(x) \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C^\infty$ par dérivation sous le signe intégral. Il reste à montrer que $\text{supp } \varphi \subset [-\pi; \pi]$.

Lemme (admis, se fait par les résidus):

L'intégrale

$I = \int_{\mathbb{R}} e^{it(x+iy)} F(x+iy) dx$ est indépendante de y .

On a donc $\forall y \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it(x+iy)} F(x+iy) dx$.

En particulier pour $y = \lambda \frac{t}{|t|}$ si $t \neq 0, \lambda > 0$. On a alors par (**), $\forall N \in \mathbb{N}, |e^{it(x+iy)} F(x+iy)| \leq \frac{C_N e^{2\lambda}}{(1+|x+iy|)^N} \times e^{-\lambda y} \leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N} e^{2\lambda} e^{-\lambda|t|}$ et ce,

pour tout $\lambda > 0$. Donc, $\forall \lambda > 0, \forall N \geq 1, |\varphi(t)| \leq C_N e^{(2-N)\lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+|x|)^N} \xrightarrow[\substack{\lambda \rightarrow +\infty \\ (N \geq 2) \\ \text{si } 2 - |t| < 0}]{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $\varphi(t) = 0$ si $|t| > 2$ et $\text{supp } \varphi \subset [-2; 2]$.

b) La preuve de 2).

Par (*), $\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq C(1+|x|)^{N_0}$. Donc $F|_{\mathbb{R}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et il existe donc une distribution T de $\mathcal{S}'$ telle que $F|_{\mathbb{R}} = \hat{T}$. Il reste à montrer que $\text{supp } T \subset [-2; 2]$.

Soit $\rho \in C_c^\infty$ une approximation de l'unité avec $\text{supp } \rho \subset [-1; 1]$, et $\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \rho(\frac{x}{\varepsilon})$.

Par 1)b), ρ_ε^{-1} se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (notée aussi ρ_ε^{-1}) et vérifiant (**). Posons $F_\varepsilon = F \rho_\varepsilon^{-1}$. Par (*), on a :

$|F_\varepsilon(z)| \leq C(1+|z|)^{N_0} C_{N,\varepsilon} (1+|z|)^N e^{(2+\varepsilon)|\text{Im } z|}$ pour $N \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$.

Par 2)a), il existe $\phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-(2+\varepsilon); 2+\varepsilon]$ telle que $\hat{\phi}_\varepsilon = F_\varepsilon$.

Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $\mathbb{R} \setminus [-2; 2]$. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\text{supp } \psi \subset \mathbb{R} \setminus]-(2+\varepsilon_0); 2+\varepsilon_0[$ et $\forall \varepsilon < \varepsilon_0, \phi_\varepsilon \psi = 0$.

Et $\langle T, \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F} \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{T}, \hat{\mathcal{F}} \psi \rangle = \langle F, \hat{\mathcal{F}} \psi \rangle$.

Or, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(y) \hat{\mathcal{F}} \psi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} F(y) \hat{\mathcal{F}} \psi(y) dy$ par CV dominée ($|F_\varepsilon(y)| \leq C$ et $\hat{\mathcal{F}} \psi \in \mathcal{S}$).

Donc $\langle T, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}_\varepsilon(y) \hat{\mathcal{F}} \psi(y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(y) \psi(y) dy = 0 \quad \therefore$

Remarques : - D'rt long, on ne fait que la D mais il est valable en multi D.

- Applications: Si $T(t) = \mathcal{F} \left(\frac{\sin(t|y|)}{|y|} \right)$, alors $\text{supp } T(t) \subset \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq t\}$. (cf. équation des ondes).

- Si $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle T, x^\alpha \rangle = 0$, alors $T = 0$.

Preuve du lemme: Soit γ_R le contour décrit comme ci-contre.

La fonction $z \mapsto e^{itz} F(z)$ est holomorphe

Donc $\int_{\gamma_R} g(z) dz = 0$.

Cela se réécrit $\int_{-R}^R g(x) dx + \int_0^y g(R+is) i ds + \int_R^{-R} g(x+iy) dx + \int_0^y g(-R+is) i ds$.

Or, $|g(R+is)| = |e^{itR}| e^{-ts} |F^y(R+is)|$
 $\leq \frac{|e^{itR}| e^{-ts}}{(1+R+|s|)^N} e^{x s} \leq \frac{e^{-ts} e^{xy}}{(1+R)^N} \leq \frac{e^{x|y|} e^{t|y|}}{(1+R)^N}$

Donc par théorème de convergence dominée, $\int_0^y g(R+is) i ds \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$

De même $\int_y^0 g(-R+is) i ds \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $0 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R g(x) dx + \int_R^{-R} g(x+iy) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx - \int_{\mathbb{R}} g(x+iy) dx$

Et le lemme est prouvé

Application: Soit T une distribution à support compact dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ $\langle T, x^\alpha \rangle = 0$. Alors $T = 0$

Preuve: Si $T \in \mathcal{E}'$, $\hat{T}$ se prolonge en une fonction entière F sur $\mathbb{C}^n$ donnée par $F(z) = \langle T, e^{-2i\pi \langle z, \cdot \rangle} \rangle$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$,

$\partial^\alpha F(z) = \langle T, \partial_z^\alpha (\dots) \rangle = (-2i\pi)^{|\alpha|} \langle T, x^\alpha e^{-2i\pi \langle z, \cdot \rangle} \rangle$

$\partial^\alpha F(0) = (-2i\pi)^{|\alpha|} \langle T, x^\alpha \rangle = 0$.

F est analytique et toutes ses dérivées sont nulles. Donc $F = 0$. Donc $\hat{T} = 0$
 Donc $T = 0$.

