

148 201
 203
 206
 208

15.00

Rombaldi
 p. 45
 Gouadon
 p. 50, 56, 57

Equivalence des normes et Théorème de Riesz

Lemme: les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés, pour $\|\cdot\|_\infty$

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact. Si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, $x_k \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$, alors par Bolzano-Weierstrass, l'unique valeur d'adhérence $x \in K$. De plus, $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, 1)$ donc $\exists p \in \mathbb{N}$ et $\exists (x_i)_{i=1}^p \in K^p$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, 1)$. Alors $\exists M = 1 + \max_{1 \leq i \leq p} \|x_i\|_\infty > 0$ tel que $K \subset B(x_1, M)$ borné. Réciproquement, soit $K \subset \mathbb{R}^n$ fermé borné. Alors, $\exists R > 0$ tel que $K \subset B(0, R) = [-R, R]^n$, compact par Tychonoff. Donc K compact.

Théorème: Si $\dim E = n < \infty$, alors toutes les normes sur E sont équivalentes

Soit $N: E \rightarrow \mathbb{R}$ norme, $(e_i)_{i=1}^n$ base de E , $N_0: E \rightarrow \mathbb{R}$ norme et $\varphi: (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, N_0)$

Avec $a := \sum_{i=1}^n N(e_i)$, on a $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ $\sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ $(x_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^n N_0(x_i N(e_i)) = a N_0(x).$$

De plus, φ est une isométrie donc est continue. Puisque $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ compact, alors $\varphi(S^{n-1}) = \{x \in E \mid N_0(x) = 1\}$ compact. Par ailleurs $\forall x, y \in E$ $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq a N_0(x-y)$. Donc $N: (E, N_0) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ continue et par Théorème des bornes atteintes, $b := \inf_{\|x\|_\infty=1} N > 0$ atteint. Alors $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $N(x) = N_0(x) N(\frac{x}{N_0(x)}) \geq b N_0(x)$, et $N_0 \sim N$.

Théorème: Soit $\bar{B} = \{x \in E \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$. Alors $\bar{B}$ compact $\Leftrightarrow \dim E < \infty$.

($\Rightarrow$) Si $\bar{B}$ compact, $\exists (x_i)_{i=1}^n \in \bar{B}^n$ tel que $\bar{B} \subset \bigcap_{i=1}^n B(x_i, 1)$. Soit $F = \text{Vect}\{x_i\}_{i=1}^n$. Supposons $\exists y \in F$.

Alors on a $\Pi_F(y) \in F$ tel que $d(y, F) = \|y - \Pi_F(y)\| > 0$. Puisque $u := \frac{y - \Pi_F(y)}{\|y - \Pi_F(y)\|} \in \bar{B}$, $\exists i \in \{1, n\}$ tel que $\|x_i - u\| < 1$. Donc $\|x_i - u\| = \frac{\|x_i\| \|y - \Pi_F(y)\| + \|\Pi_F(y) - y\|}{\|y - \Pi_F(y)\|} \geq \frac{d(y, F)}{\|y - \Pi_F(y)\|} = 1$. Absurde, donc $E = F$.

($\Leftarrow$) Si $\dim E = n < \infty$, alors $\exists \alpha > 0$ tel que $N_0 \leq \alpha \|\cdot\|_\infty$. Puisque $\bar{B}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$ compact et $\alpha \varphi$ continue, on a $\alpha \varphi(\bar{B}_\infty) = \{x \in E \mid N_0(x) \leq \alpha\}$ compact. Or $\bar{B} \subset \alpha \varphi(\bar{B}_\infty)$ donc est compact.

* $K \text{ cpl} \rightarrow \forall (x_n) \in K^M, x_n \rightarrow x, x \in K$ (p.e. $\rightarrow K \subset \overline{B(0,1)} \text{ cpl} \rightarrow K \subset B(0,1)$ (borné)).
 K borné $\rightarrow K \subset [A, B]^M, [A, B] \text{ cpl} \xrightarrow{\text{Théorème}} K \text{ cpl}$ (p.e. cpl).
 * $(e_i)_{i \in I}$ base, $N_0 = \max\{p(e_i)\}, \varphi: (x_i) \mapsto \sum x_i e_i \rightarrow N(n) \leq \alpha N_0(n), \alpha \geq 1, \rightarrow \varphi(B_{N_0}^{N(n)}) \text{ cpl} \rightarrow N \text{ cpl pour } N_0 \xrightarrow{\text{TBA}} \beta = \inf N_0 \rightarrow N(n) \geq N_0(n) \beta$
 * $B \subset \overline{B(0,1)}, F = \overline{\text{Vect}(B)}, \text{supp } \exists y \in F \rightarrow z = \inf\{y\} \rightarrow u = \frac{y+z}{2} \in B, d(e_i, u) \leq \frac{1}{2} \rightarrow \|u\| \geq 1 \nmid F \subset E^{\text{borné}}$
 $E \text{ dim finie} \rightarrow \exists \alpha > 0, N_0 \leq \alpha \| \cdot \| \rightarrow \varphi(B_{N_0}(R)) = B_0(E) \text{ cpl}, B_{N_0}(E) \subset B_0(E) \text{ cpl (p.e. cpl)}$

Lemme: Soit $E \in \mathcal{N}$ de dim finie, $F \subset E$ sEv, $x \in E \setminus F$. Alors $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ atteinte

On a $(y_n) \in F^M$ tq $\|x - y_n\| \rightarrow \inf d(x, F)$. Donc $\exists N \in \mathbb{N}, \|y_n\| \leq \|x - y_n\| + \|x\| \leq M \forall n \geq N$.

et $y_n \in F \cap \overline{B(0, M)}$ compact (fermé car F fermé (sEv dim finie), borné, dim finie)

Par B-W, $\exists y: N \rightarrow \mathbb{N}$ tq $y_{n_{k_j}} \rightarrow y \in F$ et par C° du $\| \cdot \|$ $\|x - y_{n_{k_j}}\| \rightarrow \|x - y\| = d(x, F)$.

Lemme: Soit $F \subset E$ sEv de E de dim finie ($\dim F < \infty$). Alors F fermé

Soit $(x_n) \in F^M, x_n \rightarrow x \in E$. Donc $\exists n_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N} \|x_n\| \leq M$ et $x_n \in \overline{B(0, M)} \cap F$ compact de F

Par B-W, $x_{n_{k_j}} \rightarrow \tilde{x} \in \overline{B(0, M)} \cap F \subset E$. Par unicité $x = \tilde{x}$ et $x \in F$. Donc F fermé.

Recip de ①

Théorème: Si toutes les normes de E sont équivalentes, alors E de dim finie

Soit N_1 norme, $l \in E^*$. Alors $N_2: x \in E \mapsto N_1(x) + l(x) \in \mathbb{R}$ norme. Donc $\exists \alpha > 0$ tq $N_2 \leq \alpha N_1$

d'où $\forall x \in E, l(x) \leq (\alpha - 1) N_1(x)$ et l continue sur (E, N_1) . Supp $\dim E = \infty$. Alors $\exists (e_n) \in E^M$ libre

tq $N_1(e_n) = 1$. Soit $G \subset E$ sEv tq $G \oplus H = E, H = \text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (DZorn). Soit $l \in E^*$ def par $l(e_n) = 0$

$\forall x \in G, l(x) = n \forall n \in \mathbb{N}$. Alors l non bornée sur $\{x \in E | N_1(x) = 1\}$, ie non C° $\nmid$. Donc $\dim E < \infty$

①

Appli: Si $E \in \mathcal{N}$ de dim finie, E est complet

Soit $e = (e_i)_{i \in I}$ base de $E, N_0: x = \sum_{i \in I} x_i e_i \in E \mapsto \max_{i \in I} |x_i| \in \mathbb{R}$ (eq à toutes les autres normes). Alors on a

$\varphi: (\mathbb{R}^I, \| \cdot \|_\infty) \rightarrow (E, N_0)$ homéo (isométrique) avec $(\mathbb{R}^I, \| \cdot \|_\infty)$ cpl, on a (E, N_0) cpl. Donc E cpl

②

Appli (Riesz): Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Alors $\exists p \in R_n(X)$ tel que $\|f - p\|_\infty = d(f, R_n(X))$

Si $f = 0$ ok. Sinon $B := \overline{B(0, \|f\|_\infty)} \cap R_n(X) = \{p \in R_n(X) | \|p\|_\infty \leq \|f\|_\infty\}$ cpl car $B = \overline{\text{Vect}(B(0, 1))}$

sur $R_n(X)$ de dim finie. Par TBA, $d: Q \in R_n(X) \mapsto \|f - Q\|_\infty$ est C° donc $\exists p \in B$ tq

$\|f - p\|_\infty = \inf_{Q \in B} \|f - Q\|_\infty$. Avec $\forall Q \in B, \|f - Q\|_\infty = \|Q\|_\infty - \|f\|_\infty \geq 2\|f\|_\infty - \|f\|_\infty = \|f\|_\infty = \inf_{Q \in B} \|f - Q\|_\infty$. Donc $\|f - p\|_\infty = \inf_{Q \in R_n(X)} \|f - Q\|_\infty$

③

Contres exemples: en dim infinie de $\hookrightarrow \hookrightarrow$; complet; fermé; compact

linéaire $\Rightarrow$ continue

1) Soit $\| \cdot \|_1: \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i e_i \in R(X) \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \in \mathbb{R}$ et $D: P \mapsto P'$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|D(X^n)\|_1 = n, D$ non bornée sur $B(0, 1)$

dim finie $\Rightarrow$ complet

2) Si E admet une base dénombrable, E n'est pas complet

dim finie $\Rightarrow$ fermé

3) Par Weierstrass, $\forall f \in C^0([0, 1]) \exists (p_n) \in R(X)^M \|p_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($f \notin R(X)$). Rq: avec

et exemple, $(R(X), \| \cdot \|_\infty)$ pas complet. On a $e^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Compact $\Leftrightarrow$ Fermé Borné

4) Soit E de dim infinie, $B(0, 1)$ (fermé borné) n'est pas compact (Riesz).