

150
152
155
156

15.00"

Rombaldi
p. 613, 765, 766

Décomposition de Dunford et exponentielle

K un corps, E un K -E.V., $\dim E = n \in \mathbb{N}$, $v \in \mathcal{L}(E)$, $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$ algèbre normée

Thé: Si $\chi_v = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(v)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ est scindé, alors il existe un unique couple $(d, v) \in \mathcal{L}(E)^2$:

(i) $d + v = v$; (ii) d diagonalisable; (iii) v nilpotent; (iv) $d \circ v = v \circ d$. De plus, $d, v \in K[E]$

Existence Par le lemme des Moyaux, $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(v)} N_\lambda$ et les projecteurs $\Pi_\lambda: E \rightarrow N_\lambda$ polynômes en v

On pose $d = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(v)} \lambda \Pi_\lambda \in K(v)$ et $v = v - d \in K(v)$. Alors $v = d + v$ et par construction

$d, v \in K(v)$ d'où $d \circ v = v \circ d$. Dans une base adaptée à $E = \bigoplus N_\lambda$, d est diagonale

donc diagonalisable. On a $\forall \lambda \in \text{Sp}(v)$, $v|_{N_\lambda} = (v - \lambda \text{Id})|_{N_\lambda}^{m(\lambda)} = 0$, donc v nilpotent

Unicité Si (d', v') est une 2^{ème} décomposition, alors $d' \circ v' = v' \circ d'$ et puisque $d, v \in K(v)$, d, d', v, v'

commutent l'a l. On a $d + v = d' + v'$, donc $d - d' = v' - v$. Or $d - d'$ diagonalisable

car d et d' commutent et sont diagonalisables. De plus $v' - v$ nilpotent par binôme

de Newton. Donc $d - d' = v' - v = 0$ et la décomposition est unique. $\square$

Thé: Si $v = d + v$ est la décomposition de Dunford de v , alors celle de e^v

est $e^d + e^d(e^v - \text{Id}_E)$ avec e^d diagonalisable, $e^d(e^v - \text{Id}_E)$ nilpotent

Comme d et v commutent, $e^v = e^d e^v = e^d + e^d(e^v - \text{Id}_E)$. De plus, $e^d, e^d(e^v - \text{Id}_E) \in K(v)$

donc commutent, et e^d diagonalisable car d l'est. Soit q l'indice de nilpotence de v :

$$(e^d(e^v - \text{Id}_E))^q = (e^d \circ \sum_{k=1}^{q-1} \frac{v^k}{k!})^q = (v \circ e^d \circ \sum_{k=1}^{q-1} \frac{v^{k-1}}{(k-1)!})^q = v^q \circ (e^d \circ \sum_{k=1}^{q-1} \frac{v^{k-1}}{(k-1)!})^q = 0, \text{ nilpotent. } \square$$

Thé: Si χ_v scindé, alors: v diagonalisable $\Leftrightarrow e^v$ diagonalisable.

($\Rightarrow$) Si v est diagonalisable, alors e^v l'est Dunford

($\Leftarrow$) Si e^v diagonalisable et $v = d + v$ sa décomposition de Dunford, alors celle de

e^v donne $e^d(e^v - \text{Id}_E) = 0$. Donc $e^v = \text{Id}_E$. Soit $q \in \mathbb{N}$ l'indice de nilpotence de v .

On a $\sum_{k=0}^{q-1} \frac{v^k}{k!} = \text{Id}_E$ et $P = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{X^k}{k!}$ annule v . Or $p_r = X^q$ divise P , impossible

donc $v = 0$ et $v = d$ diagonalisable. $\square$

Lemme: $\chi_v = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(v)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$, $\forall \lambda \in \text{Sp}(v)$ $N_\lambda := \text{Ker}(v - \lambda \text{Id})^{m(\lambda)}$, alors $(v - \lambda \text{Id})|_{N_\lambda} = 0$

et $v - \lambda \text{Id}|_{N_\lambda}$ nilpotent. Avec $\pi_\lambda: E \rightarrow N_\lambda$, on a $v = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(v)} (v - \lambda \text{Id}) \pi_\lambda$ nilpotent.

On a $\forall \lambda \in N_\lambda = \text{Ker}(v - \lambda \text{Id})^{m(\lambda)}$, $(v - \lambda \text{Id})^{m(\lambda)}(x) = 0$ d'où $v = (v - \lambda \text{Id})^{m(\lambda)} = 0$. Donc v_λ nilpotent et $\forall x = \sum x_\lambda \in \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(v)} N_\lambda = E$, avec $m = \max_{\lambda \in \text{Sp}(v)} m(\lambda)$, $v^m(x) = \sum v_\lambda^m(x_\lambda) = 0$ d'où v nilpotent.

Lemme: $(v_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}[E]^I$ diag, alors $(v_i)_{i \in I}$ co-diag $\Leftrightarrow \forall i, j \in I, v_i v_j = v_j v_i$

($\Rightarrow$) Si $\exists b$ base E tq $v_i v_j \in I$ $(v_i)_b$ diagonale, alors $(v_i v_j)_b = (v_i)_b (v_j)_b = (v_j)_b (v_i)_b = (v_j v_i)_b$

($\Leftarrow$) I Si $n=1$, les (v_i) sont des homothéties donc commutent. Supp ok en dim $n-1$

H Si les (v_i) homothéties c'est ok. Sinon $\exists j \in I$, v_j pas homothétie et $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(v_j)} E_\lambda(v_j)$

avec $\forall \lambda \in \text{Sp}(v_j)$ $\dim E_\lambda(v_j) = \dim \text{Ker}(v_j - \lambda \text{Id}) \leq n-1$ et $E_\lambda(v_j)$ est v_i -stable $\forall i \in I$.

Donc $\forall i \in I$, $v_i|_{E_\lambda(v_j)}$ diag. Par (H.R.), $\forall \lambda \in \text{Sp}(v_j)$ $\exists b_\lambda$ base de $E_\lambda(v_j)$ qui

co-diag les $(v_i|_{E_\lambda(v_j)})$. Soit $b = \bigcup_{\lambda \in \text{Sp}(v_j)} b_\lambda$ base E adaptée à $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(v_j)} E_\lambda(v_j)$, qui co-diag tous les (v_i) .

Exemple: Décomposition de Dunford de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$.

On a $\chi_M = (X-a)(X-c)$ scindé. Si $a \neq c$, M diag et $M = D + V$, $D = M$ et $V = 0$

Sinon $a = c$ et $M = D + V$, $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ diag, $V = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilp $DV = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ba \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = VD$ commutent.

Exemple: Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a:

$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^3$ et $\dots \mu_A = X(X-1)^2$. On cherche les proj sur N_0 et N_1 :

Pour $\lambda_i \in \text{Sp}(A)$, $\mu_A = \prod_{k=1}^r P_k$, $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$ premier avec $\tilde{P}_i = \prod_{k \neq i} P_k$, $1 = P_i Q_i + \tilde{P}_i \tilde{Q}_i$

(Bezout) et $\pi_i = (\tilde{P}_i \tilde{Q}_i)(v)$ proj sur $\text{Ker } P_i(v) = N_i$. Ici $P_0 = X$ et $P_1 = (X-1)^2$. On

a par div euclid $(X-1)^2 = X(X-1) + 1$ donc $1 = (X-1)^2 + X(2-X)$. Alors $\pi_0 = (A - \text{Id})^2$, $\pi_1 = 2A - A^2$

On pose $D = 0\pi_0 + 1\pi_1 = 2A - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = A - D = A^2 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Application: Calcul de puissance et d'exponentielle

Soit $v = d + v$ ($d \in \mathbb{K}$), $d = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(v)} \lambda \pi_\lambda$ diag et $v = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(v)} v_\lambda$ où $v_\lambda = 0$ nilp. Soit $p \in \mathbb{N}^+$, on a par Newton

$v^p = (d+v)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} v^k d^{p-k} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} v^k \left(\sum_{\lambda \in \text{Sp}(v)} \lambda^k \pi_\lambda \right)$, $e^v = e^d e^v = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{\lambda \in \text{Sp}(v)} \lambda^p \pi_\lambda \right) \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{\lambda \in \text{Sp}(v)} (v - \lambda \text{Id})^p \pi_\lambda \right)$

Exemple: Calcul de e^A , $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $= \sum_{\lambda \in \text{Sp}(v)} e^\lambda \left(\sum_{p=0}^{m(\lambda)-1} \frac{(v - \lambda \text{Id})^p}{p!} \right) \pi_\lambda$

$\chi_A = (X-2)^2(X-3)$, $1 = (X-2)^2 + (1-X)(X-3)$, $\pi_2 = (I-A)(A-3I) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi_3 = (A-2I)^2 = \dots$

alors $e^A = e^D e^V = e^2 (A-2I)^0 + (A-2I)^1 \pi_2 + e^3 (A-3I)^0 \pi_3 = e^2 (A-I) \pi_2 + e^3 \pi_3 + \dots$