

Critère de Sylvester

Théorème: Soit $q \in Q(E)$, e base E $\mathbb{R}$ -Ev, $A = [q]_e \in S_n(\mathbb{R})$. On a $q > 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{1, n\} \det A_k > 0$

($\Rightarrow$) Si $q > 0$, on a $\forall k \in \{1, n\} q|_{E_k} > 0$ où $E_k = \text{Vect}\{e_i\}_{i=1}^k$. Alors $A_k = [q]_{E_k} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\det(A_k) > 0$.

($\Leftarrow$) Supposons $\det A_k > 0 \forall k \in \{1, n\}$. Si $n=1$, $A = (\det A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Supposons le résultat vrai au rang $n-1 \geq 1$.

Soit $H = \text{Vect}\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$, par (H, R) $q|_H > 0$ puisque $\dim H = n-1$. Soit $\hat{e}_i$ base de $H \perp q|_H$, et $\hat{e}_n \in H^\perp \setminus \{0\}$.

Puisque $q|_H$ non dégénérée, $E = H \oplus H^\perp$, et dans la base $e = (\hat{e}_i)_{i=1}^n$ on a $[q]_e = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$.

Soit $P = P_{e \rightarrow \hat{e}} \in GL_n(\mathbb{R})$ matrice de passage. On a $[q]_{\hat{e}} = {}^t P A P$, donc $\alpha = \det [q]_{\hat{e}} = \det(P)^t \det(A)$.

Puisque $\det(A) = \det(A_n) > 0$, on a $\alpha > 0$. Alors $q > 0$ et le théorème est vrai par récurrence.

Application: Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ où $a_{ij} = \frac{1}{1+|i-j|}$. Alors $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Soit $t \in]0, 1[$ et $M(t) = (t^{|i-j|})_{i,j \in \mathbb{N}}$. On remarque que $M(t), A \in S_n(\mathbb{R})$.

① $M(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ② $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

① On pose $\forall k \in \{1, n\}$, $D_k(t) = \det(M|_{E_k})$. Montrons que $D_k(t) = (1-t)^{k-1}$. Pour $k=1$, $D_1(t) = 1 = (1-t)^0$.

Supposons que $D_k(t) = (1-t)^{k-1}$ pour $k \in \{1, n-1\}$, on calcule:

$$D_{n+1}(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^k \\ t & 1 & \dots & t^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^k & \dots & t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^{k-1} & 0 \\ t & 1 & \dots & t^{k-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^k & \dots & t & 1-t^k \end{vmatrix}$$

On soustrait à la dernière colonne
t fois l'avant dernière
 $C_n \leftarrow C_n - t C_{n-1}$

$$= (1-t)^k D_k(t) = (1-t)^k$$

Par récurrence, on a $D_k(t) = (1-t)^{k-1} > 0$. D'après le critère de Sylvester, $M(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

② On remarque que $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^{|i-j|} dt = \frac{1}{1+|i-j|}$. Donc $A = \int_0^1 M(t) dt$ (coef par coef).

Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a $\varphi: t \in]0, 1[\mapsto \langle M(t)X, X \rangle > 0$ d'après ①, et φ continue car polynomiale en t . On a donc $\int_0^1 \varphi(t) dt > 0$. De plus

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 \langle M(t)X, X \rangle dt = \left\langle \int_0^1 M(t) dt X, X \right\rangle = \langle AX, X \rangle > 0 \text{ d'où } A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

Application: $Q^{++}(E) := \{q \in Q(E) \mid q > 0\}$ ouvert de $Q(E)$.

Soit e base de E . On pose $\forall k \in \{1, n\}$, $\Delta_k: q \in Q(E) \mapsto \det([q]_e)_k \in \mathbb{R}$ continue.

D'après le critère de Sylvester, $Q^{++}(E) = \bigcap_{k=1}^n \Delta_k^{-1}(\mathbb{R}^+) \text{ ouvert.}$