

148
150
151
158

14, 00"

Rombaldi
p. 743-745
Gourdon
p. 271-272

Réduction des endomorphismes normaux (sur $\mathbb{R}$)

$E \in \mathcal{L}(E)$ de $\dim n \in \mathbb{N}$. $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme, u^* son adjoint

lem: Si $F \subseteq E$ de E stable par u normal, alors

F est stable par u^* , $F^\perp$ stable par u et u^* . De plus, u_F normal.

Démo On sait que $F \oplus F^\perp = E$. Dans une base adaptée, u s'écrit $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} F \\ F^\perp \end{pmatrix}$
Comme u normal, ${}^tAA = A^tA$ ie $\begin{pmatrix} {}^tA_1A_1 & {}^tA_1A_2 \\ {}^tA_2A_1 & {}^tA_2A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^tA_1 + A_2^tA_2 & {}^tA_1A_2 \\ A_1^tA_2 + A_2^tA_3 & A_3^tA_3 \end{pmatrix}$

Donc $\text{Tr}({}^tA_1A_1) = \text{Tr}(A_1^tA_1 + A_2^tA_2)$ et $\text{Tr}(A_2^tA_2) = 0$

Comme $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^tB)$ produit scalaire, $A_2 = 0$ et $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$. $\square$

The: Si $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, alors il existe b bon de E .

(Pn) $\exists p \in [0, n]$, $D_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale, $\exists q \in [0, n]$ tq $[U_b] = \begin{pmatrix} D_p & (0) \\ (0) & R_q \end{pmatrix}$
 $\forall k \in [0, q], \exists (a_k, b_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \text{ et } R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Récurrance sur $n \in \mathbb{N}$

Démo: ① Si $n=1$, c'est ok. Si $n=2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrice de u dans une bon de E , alors
 ${}^tAA = A^tA = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & a^2+c^2 \\ ac+bd & ab+cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ a^2+b^2 & ab+cd \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b^2=c^2 \\ (a-d)(b-c)=0 \end{cases}$. Si $b=c=0$, A diagonale $\checkmark$
Si $b=c \neq 0$, on a $\Delta_{p_0} > 0$ et $\mathcal{K}_u$ scindé en valeurs simples, donc u diagonalisable dans une bon. Si $b=-c \neq 0$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \checkmark$. $\square$

② * Si $\exists \lambda \in \text{Sp}(u)$ réelle, E_λ stable par u donc par u^* et $F = E_\lambda^\perp$ stable par u et u^*
Soit b_1 bon de E_λ . Comme $\dim F \leq n-1$, u_F est normal ($u_F^* = (u_F)^\perp = (u^*)_F$) on a par (H.R) b_2 bon de F tq u_F vérifie (Pn-1). Donc u vérifie (Pn) avec $b = b_1 \cup b_2$ bon de E
* Sinon, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ racine de p_u (Caly clac). Donc $\exists Q = X^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ tq $Q|p_u$ et $Q(X) \neq 0$. Alors $\exists S \in \mathbb{R}[X]$ $QS = p_u$, avec $Q(u), S(u) \neq 0$ car p_u min
On a $Q(u) \circ S(u) = p_u(u) = 0$ et $Q(u)$ non inj. Soit $x \in \text{Ker}(Q(u)) \neq 0$ et on pose $F = \text{Vect}\{x, u(x)\}$. Comme $u(u(x)) = -b u(x) - c x \in F$, F est stable par u donc par u^* et $F^\perp$ également. Sur F de $\dim 2$, u_F normal donc $\exists b_1$ bon de F tq $[u_F]_{b_1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et sur $F^\perp$ de $\dim \leq n-2$, $u_{F^\perp}$ normal et par (H.R) $\exists b_2$ bon de $F^\perp$ tq $u_{F^\perp}$ vérifie (Pn-2). Donc u vérifie (Pn) avec $b = b_1 \cup b_2$ bon de E . $\square$

- * $[U] = A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \rightarrow {}^t A_1 A_2 = A_2 {}^t A_1 + A_1 {}^t A_2 \rightarrow A_2 = 0 \text{ (T.T.)}$
- * $n=1, n=2 \quad [U] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow b^2 = c^2, (a-d)(b-c) = 0 \rightarrow b=c=0 \text{ diag, } b=c \neq 0 \Delta x > 0, b=-c \ a=d \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$
- * $\exists \lambda \in \text{Sp}(U) \rightarrow E_\lambda, E_\lambda^\perp \text{ u et } U^t \text{ st} \rightarrow H_{n-1} \hat{=} U E_\lambda, U E_\lambda^\perp \rightarrow \text{recolle base}$
- * $\exists \lambda \in \text{Sp}(U), \exists Q \in \text{U}_0 \rightarrow Q(U)S(U) = 0 \rightarrow \exists \text{ une base } Q(U), F = \text{Vect}\{z, U(z)\} \rightarrow F \text{ st} \rightarrow H_{n-1} \hat{=} U F, U F^\perp \rightarrow \text{recolle base}$

Corollaire: Si $u \in S(E)$, alors u est diag dans une b.o.n.

On a u normal donc $\exists$ b b.o.n de E , $[U]_b = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & R_q \end{pmatrix}$. Or ${}^t[U]_b = [U]_b$ donc $\forall k \in \{1, \dots, q\}, \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{pmatrix} \Rightarrow b_k = 0$ et u diag dans b , avec $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$

Corollaire: Si $u \in A(E)$, alors u est diag par bloc dans b bon: $[U]_b = \begin{pmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_q \end{pmatrix}$. Or ${}^t[U]_b = -[U]_b$ donc $D_p = 0$ et $R_k = \begin{pmatrix} 0 & -b_k \\ b_k & 0 \end{pmatrix}$ avec $\text{Sp}(u) \subset i\mathbb{R} \quad (X_k = \prod_{k=1}^q (X^2 + b_k^2) = \prod_{k=1}^q (X + ib_k)(X - ib_k)$ et $\text{Sp}_\mathbb{C}(u) = \{ib_k, -ib_k \mid k \in \{1, \dots, q\}\}$.

Corollaire: Si $u \in O(E)$, alors u est diag par bloc dans b bon: $[U]_b = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -2R \end{pmatrix}$ On a u normal et $[U]_b = \begin{pmatrix} D_p & 0 \\ 0 & R_q \end{pmatrix}$. Or $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ donc $D_p = \begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2} \end{pmatrix}$ et ${}^t[U]_b[U]_b = I_n$ donc $R_k R_k = I_2$ et $a_k^2 + b_k^2 = 1$ et $\exists \theta_k \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$, $R_k = R(\theta_k)$