

151 (148)
156
159

14700''

Rombaldi
p. 679-681

Réduction des endomorphismes nilpotents.

Soit E K -Ev de dim n et $u \in L(E)$ nilpotent d'indice $q \in \mathbb{N}^*$

Lemme: Il existe $x \in E, \varphi \in E^*$ tels que $F := \text{Vect} \{ (u^k(x))_{k=0}^{q-1} \}$ et $G := \text{Vect} \{ (\varphi(u^k))_{k=0}^{q-1} \}$ soient stables par u et vérifient $F \oplus G = E$.

u nilpotent
 $x \in E, \varphi \in E^*$

Puisque $\forall k \in \mathbb{N} (u)^k = u^k$, u est nilpotent d'indice q . Donc $u^{q-1} \neq 0$ et $\exists \varphi \in E^*$ tel que $\varphi(u^{q-1}) \neq 0$. Alors $\exists x \in E$ tel que $\varphi(u^{q-1}(x)) = \varphi(u^{q-1}(x)) \neq 0$. Alors $u^{q-1}(x) \neq 0$ (Sinon $\varphi(u^{q-1}(x)) = \varphi(0) = 0$). Montrons que $b_1 = (u^k(x))_{k=0}^{q-1}$ libre

libre $(u^k(x))_{k=0}^{q-1}$

Soit $(\lambda_k)_{k=0}^{q-1} \in K^q$ tel que $\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Alors on a par itération.

Pour $j=0$

$$\begin{aligned} 0 &= u^{q-1} \left(\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^{k+q-1}(x) \\ &= \lambda_0 u^{q-1}(x) \end{aligned}$$

Si pour $j \in [0, q-1]$, $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{j-1} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= u^{q-1} \left(\sum_{k=j}^{q-1} \lambda_k u^k(x) \right) \\ &= \sum_{k=j}^{q-1} \lambda_k u^{k+q-1}(x) \\ &= \lambda_j u^{q-1}(x) \end{aligned}$$

Puisque $u^{q-1}(x) \neq 0$, on a $\lambda_0 \neq 0$. Alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_{q-1} = 0$ et b_1 libre. De la même manière, $(\varphi(u^k))_{k=0}^{q-1}$ libre. On pose $F = \text{Vect}(b_1)$, $H = \text{Vect} \{ (\varphi(u^k))_{k=0}^{q-1} \}$ et $G = H^\circ$

$\dim F + \dim G = n$

On a donc $\dim F + \dim G = q + n - q = n$. De plus, F et G sont stables par u

F, G u -stables

(car $\forall y \in G, \forall \varphi \in H, \varphi(u(y)) = \varphi(u(\varphi(y))) = \varphi(u(\varphi(y))) = 0$ donc $u(y) \in G$). Soit $y = \sum_{k=0}^{q-1} \mu_k u^k(x) \in F \cap G$

$F \cap G = \{0\}$

On a $u^{q-1}(y) = \mu_0 u^{q-1}(x) \in F \cap G$. Donc $0 = \varphi(\mu_0 u^{q-1}(x)) = \mu_0 \varphi(u^{q-1}(x))$. Or, $\varphi(u^{q-1}(x)) \neq 0$, donc $\mu_0 = 0$. Par itération, $\mu_0 = \dots = \mu_{q-1} = 0$ et $y = 0$.

Comme $F \cap G = \{0\}$, on en déduit $F \oplus G = E$.

Thé: Il existe une base $b = \bigcup_{i=1}^q b_i$ telle que $E_i = \text{Vect}(b_i)$ soit stable par u , $\forall i \in [1, q]$ et telle que dans la base b_i

$$[u_{E_i}]_{b_i} = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$$

Par récurrence sur $\dim E$, si $n=1$ alors $u=0$ et ok. Supposons le résultat vrai en dimension inférieure à $n-1$. Par le lemme, $F = E_1 = \text{Vect}(b_1)$ est stable par u .

$u|_F$ est nilpotent et $[u_{E_1}]_{b_1} = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$. Si $q=n$ c'est fini, sinon pour $q \leq n-1$

on applique l'hypothèse de récurrence à $u|_G$ nilpotent sur G , où $\dim G = n - q \leq n-1$.

On a $B = \bigcup_{i=1}^q b_i$ base de G et la base $b = b_1 \cup B$ adaptée à $F \oplus G = E$ vérifie le thé.

* $(\varphi)^k = 0 \Rightarrow \exists \varphi, \varphi^k \neq 0 \Rightarrow \exists b_1, \dots, b_{k-1} \in V \text{ s.t. } \varphi(b_i) = b_{i+1} \text{ for } i=1, \dots, k-2, \varphi(b_{k-1}) = 0 \Rightarrow \varphi^k(b_{k-1}) = 0 \Rightarrow \varphi^k \neq 0$
 $\rightarrow \varphi^{k-1}(b_{k-1}) = \lambda \varphi^k(b_{k-1}) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \varphi^{k-1}(b_{k-1}) = 0 \Rightarrow \varphi^{k-1} = 0 \Rightarrow \varphi^{k-1} = 0 \Rightarrow \varphi^{k-1} = 0 \Rightarrow \varphi^{k-1} = 0$
 $\rightarrow \dim F + \dim G = n \rightarrow \varphi = \sum_{j=1}^p \varphi_j \in F \oplus G \rightarrow \varphi^k(\varphi) = \varphi \circ \varphi^k(\varphi) \in F \oplus G \rightarrow \varphi^k(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi^k = 0 \Rightarrow \varphi^k = 0 \Rightarrow \varphi^k = 0$
 * $n=1 \text{ ok} \rightarrow \dim F = n \text{ ok} \rightarrow \text{si } \dim G \in \{1, n-1\} \rightarrow H_{n-1} \text{ à } U_G \rightarrow \text{recoller base}$

Théorème: (Réduction de Jordan) Soit $u \in L(E)$, $\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ scindé

et $\mu_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n(\lambda)}$ (nd $\leq m(\lambda)$). Alors $\exists$ base de E $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$ où E_{λ_k} 30/11

telle que $[u]_b = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_p} \end{pmatrix}$ où $\forall k \in \{1, p\}$ $J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}$ $\forall i \in \{1, m_k\}$ $m_k = m(\lambda_k)$

Avec $\forall k \in \{1, p\}$ $N_k = \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id})^{m_k} = \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id})^{m_k}$ et $\text{Sp}(u) = \{\lambda_k\}_{k=1}^p$, $n_k = n(\lambda_k)$.

On a $E = \bigoplus_{k=1}^p N_k$ (on a $n_k \leq m_k$, $\text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id})^{m_k} = N_k \subset M_k = \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id})^{m_k}$ et $E = \bigoplus_{k=1}^p N_k = \bigoplus_{k=1}^p M_k$

donc $\dim N_k \leq \dim M_k$, $n = \sum_{k=1}^p \dim N_k = \sum_{k=1}^p \dim M_k \Rightarrow \dim N_k = \dim M_k \Rightarrow N_k = M_k$. De plus

$\forall k \in \{1, p\}$, N_k est u -stable et $v_k := (u - \lambda_k \text{Id})|_{N_k}$ nilp d'indice n_k ($v_k^{n_k} = 0$ par def et

si $v_k^{n_k-1} = 0$ alors $(X - \lambda_k)^{n_k-1} \prod_{j \neq k} (X - \lambda_j)^{m_j} = P$ annule u car annule $u|_{N_j}$ et $E = \bigoplus_{j=1}^p N_j$ avec μ_u)

Donc $\exists B_k$ base de N_k tq $[v_k]_{B_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{m_k}(K)$ ($d_k := \dim N_k$, $u_k = u|_{N_k}$

$\chi_{u_k} = (X - \lambda_k)^{d_k}$ car $\forall \lambda \in \text{Sp}(u_k) \subset \text{Sp}(u)$, $\lambda = \lambda_j$ de $\forall p \text{ n.e. } N_j \cap M_k \setminus \{0\} \Rightarrow j=k$ et $\text{Sp}(u_k) = \{\lambda_k\}$,

donc $\chi_u = \prod_{k=1}^p \chi_{u_k}$ ($E = \bigoplus_{k=1}^p N_k$) $\Rightarrow d_k = m_k \forall k \in \{1, p\}$. Dans $b = \bigcup_{k=1}^p B_k$, $[u]_b = \begin{pmatrix} [u_1]_{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [u_p]_{B_p} \end{pmatrix}$

où $[u_k]_{B_k} = [v_k]_{B_k} + [\lambda_k \text{Id}_{N_k}]_{B_k} = J_k$

Application: Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, alors M et Γ semblables

Puisque χ_M sc, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$, $Q^{-1}MQ = \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Gamma_p \end{pmatrix}$, $\Gamma_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}$ ou $\Gamma_k = (\lambda_k)$.

Si $\Gamma_k = (\lambda_k)$, $\Gamma_k = M_k P_k = (1)$. Sinon, avec v_k prends de $\mathbb{C}^{n_k}$ associé à $\Gamma_k \in M_{n_k}(\mathbb{C})$ dans $(e_i)_{i=1}^{n_k}$

base can. Alors dans la base $(e_{n_k+i})_{i=1}^{n_k}$, $[v_k] = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix} = \Gamma_k$. Donc $\exists P_k \in GL_{n_k}(\mathbb{C})$ tq

$\Gamma_k = P_k^{-1} M_k P_k$. On pose $P = \begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_p \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $P^{-1}MP = \Gamma$. Donc avec

$R = QPQ \in GL_n(\mathbb{C})$, $R^{-1}MR = Q^{-1}P^{-1}(Q^{-1}MQ)PQ = Q^{-1}(P^{-1}\Gamma P)Q = Q^{-1}\Gamma Q = \Gamma$.

Rq: Si $M \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$, $\exists R \in GL_n(\mathbb{C})$ $\Gamma = R^{-1}MR \Rightarrow \dots \exists S \in GL_n(\mathbb{R})$, $\Gamma = S^{-1}MS$.

Exemple: La réduction de Jordan de $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On a $\chi_M = (X+1)(X-2)^2$. On a $E_2 = \text{Vect}\{v_2\}$, $v_2 = (-1, 1, -2) \rightsquigarrow$ bloc de taille 1x1

On a $E_1 = \text{Vect}\{v_1\}$, $v_1 = (1, 0, 1) \rightsquigarrow$ 1 bloc (nb bloc = dim E_λ) de taille 2x2 (taille = $m(\lambda)$)

On cherche $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tq $(A - 2I_3)v_3 = v_2 \xrightarrow{\text{choix}} v_3 = (-1, 1, 0)$ convient.

$Av_1 = -v_1$, $Av_2 = 2v_2$, $Av_3 = v_2 + 2v_3$ et dans la base $b = (v_1, v_2, v_3)$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \text{Av}_1 \text{ Av}_2 \text{ Av}_3 \end{matrix}$ Idée: si $Av_1 = \lambda v_1$, pour construire le bloc $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \text{Av}_1 \text{ Av}_2 \end{matrix}$ associé à λ et $v_2 \in E_\lambda$, $(A - \lambda I_{m_k})v_2 = v_1 \rightsquigarrow Av_2 = v_1 + \lambda v_2$