

Exponentielle sur $S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéomorphisme.

Lemme : On a $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A)}$.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, on a $(e_k)_{k=1}^n$ b.o.n. de vecteurs propres de A , associée aux valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Alors, $\forall x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_2^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 \lambda_k^2 \leq \lambda_n^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 = \lambda_n^2 \|x\|_2^2$.

D'où $\|A\|_2 \leq \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\rho(A)}$. De plus, $\|Ae_k\|_2 = \sqrt{\lambda_k^2} = \sqrt{\lambda_k} \|e_k\|_2$, donc $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A)}$.

Théorème : $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

① $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ bien définie ② Surjectivité ③ Injectivité ④ Bi-continuité

① On a $\forall S \in S_n(\mathbb{R}), e^S = e^{\frac{1}{2}S} e^{\frac{1}{2}S} = e^{\frac{1}{2}S} e^{\frac{1}{2}S} = (e^{\frac{1}{2}S})^2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

② Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, $\exists Q \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Q^T B Q = \Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$, où $\mu_k \in \mathbb{R}^+ \forall k \in \{1, \dots, n\}$. On pose $\lambda_k = \ln(\mu_k)$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Alors $A = Q D Q^T \in S_n(\mathbb{R})$, et on a $e^A = Q e^D Q^T = Q \Delta Q^T = B$. D'où la surjectivité, et $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ $P(\Delta) = D$, $P(e^A) = P(B) = A$.

③ Soient $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $e^A = e^{A'}$. Puisque A commute avec $e^A = e^{A'}$, alors aussi avec $P(e^{A'}) = A'$.

A et A' commutent et sont co-diagonalisables. Donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P D P^{-1}$, $A' = P D' P^{-1}$ où D, D' diagonales. Puisque $e^A = e^{A'}$, on a $e^D = e^{D'}$, et $D = D'$ car $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ injective. D'où $A = A'$.

④ Puisque $\exp: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ continue, on a $\exp$ continue sur $S_n(\mathbb{R})$. Soit $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in S_n^{++}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par surjectivité, $\exists (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in S_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $e^{A_k} = B_k$ et $e^A = B$. Montrons que $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$.

⑤ Puisque $M \mapsto M^{-1}$ continue sur $GL_n(\mathbb{R})$, on a $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(B_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente, donc bornée pour $\|\cdot\|_2$. D'après le lemme, on a $C, C' > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\text{Sp}(B_k) \subset]C', C]$ et $\text{Sp}(B_k^{-1}) \subset]C, C']$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\text{Sp}(B_k) \subset [\frac{1}{C'}, C]$ et $\text{Sp}(A_k) \subset [\ln(\frac{1}{C'}), \ln(C)]$. Puisque $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $\|\cdot\|_2$, par Bolzano-Weierstrass, $\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ extraite telle que $A_{\varphi(k)} \rightarrow \tilde{A} \in S_n(\mathbb{R})$.

⑥ Par continuité, on a $e^{\tilde{A}} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{A_{\varphi(k)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} B_{\varphi(k)} = B = e^A$. Par injectivité, on a $\tilde{A} = A$.

Puisque $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bornée, admet A pour unique valeur d'adhérence, on a $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$.

