

Simplicité de $\mathfrak{S}_n$ Lemme 1: $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les 3-cycles. ($n \geq 3$)Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n \leq \mathcal{Y}_n$. Alors, σ s'écrit $\sigma = \prod_{i=1}^k \tau_i$ où $\tau_i \in \mathcal{Y}_n$ transposition.Puisque $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k = 1$, on a $k \in 2\mathbb{N}$. De plus $\forall a, b, c, d \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $(ab)(cd) = (abc)(bcd)$. Donc σ est un produit pair de 3-cycles.Comme les 3-cycles sont dans $\mathfrak{S}_n$, on en déduit $\mathfrak{S}_n = \langle \text{3-cycles} \rangle$.Lemme 2: les 3-cycles sont conjugués entre eux dans $\mathfrak{S}_n$ ($n \geq 5$)Soit $\gamma_1 = (a_1 b_1 c_1)$, $\gamma_2 = (a_2 b_2 c_2) \in \mathfrak{S}_n$. On a $\sigma = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}_n$ tel que $\sigma \gamma_1 \sigma^{-1} = \gamma_2$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, c'est bon, sinon on pose $\tau = (d, e) \in \mathcal{Y}_n$ où $d, e \notin \text{Supp}(\gamma_1)$ et $\tilde{\sigma} := \sigma \tau \in \mathfrak{S}_n$. Alors $\tilde{\sigma} \gamma_1 \tilde{\sigma}^{-1} = \sigma \tau \gamma_1 \tau^{-1} \sigma^{-1} = \sigma \gamma_1 \sigma^{-1} = \gamma_2$.Thé: $\mathfrak{S}_n$ est simple pour $n \geq 5$ Soit $H \triangleleft \mathfrak{S}_n$, $H \neq \{\text{Id}\}$. On veut construire un 3-cycle dans H . Soit $\sigma \in H \setminus \{\text{Id}\}$, donc $\exists x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sigma(x) \neq x$. On pose $y = \sigma(x)$ et $z \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x, y, \sigma(y)\}$.On pose $\gamma = (x y z)$ et $p := [\sigma, \gamma] = \sigma(\gamma \sigma^{-1} \gamma^{-1}) \in H$ car $H \triangleleft \mathfrak{S}_n$.De plus, $p = (\sigma \gamma \sigma^{-1}) \gamma^{-1} = (\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) (z y x)$, donc $\text{supp}(p) \leq 5$.On raisonne sur le type de cycle de p , où $\varepsilon(p) = 1$:* $[1, 1, 1, 1, 1]$: $p = \text{Id}$ or $p(z) = \sigma(y) \neq z$ absurde* $[2, 2, 1]$: $p = (x_1 x_2)(x_3 x_4)$, soit $\tau := (x_1 x_2 x_5)$ où $x_5 \notin \text{supp}(p)$. Alors $\rightarrow [p, \tau] = (p \tau p^{-1}) \tau^{-1} = (p(x_1) p(x_2) p(x_3)) \tau^{-1} = (x_2 x_1 x_3) \tau^{-1} = \tau^{-2} = \tau \in H$ * $[3, 1, 1]$: p 3-cycles* $[5]$: $p = (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$, soit $\tau = (x_1 x_2 x_3)$. Alors $\rightarrow [p, \tau] = (p \tau p^{-1}) \tau^{-1} = (p(x_2) p(x_3) p(x_4)) \tau^{-1} = (x_3 x_4 x_1) (x_5 x_2 x_1)$
 $= (x_1 x_5 x_3) \in H$ 3-cycleDans tous les cas H contient un 3-cycle, donc contient toute sa classe de conjugaison puisque $H \triangleleft \mathfrak{S}_n$. Donc H contient tous les 3-cycles (Lemme 2) et $H = \mathfrak{S}_n$ (Lemme 1). Finalement $\mathfrak{S}_n$ est simple. $\square$

Remarque: Pour $n \leq 4$, $\mathfrak{S}_n$ simple?

On a $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3 = \{\text{Id}\}$ simples et $\mathfrak{S}_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ simple car $\forall p \in \mathbb{P}, H \trianglelefteq \mathfrak{S}_p$
 $\Rightarrow |H| \in \{1, p\}$ et $H = \{\text{Id}\}$ ou $H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Pour $\mathfrak{S}_4$, $V_4 = \{\text{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
 vérifie $V_4 \trianglelefteq \mathfrak{S}_4$ (signature 1), $V_4 \trianglelefteq \mathfrak{S}_4$ ($\tau_1 \tau_2 = \tau_3$) et $V_4 \trianglelefteq \mathfrak{S}_4$ ($\forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}$
 $(\tau_i \tau_j) \tau_k^{-1} = (\tau_i \tau_j) \tau_k = \tau_3$ car $\tau_i^2 = \text{Id}$)

Proposition: Classification sous-groupes normaux de $\mathfrak{S}_n$.

On a $\mathfrak{S}_2 = \{\text{Id}\}$, $\mathfrak{S}_3 = \{\text{Id}, \tau\}$ groupe abélien, $\text{sGN}(\mathfrak{S}_2) = \{\mathfrak{S}_2\}$, $\text{sGN}(\mathfrak{S}_3) = \{\mathfrak{S}_3\}$.

On a $\text{sGN}(\mathfrak{S}_4) = \{\text{Id}, \mathfrak{S}_4\}$ et $\text{sGN}(\mathfrak{S}_n) = \{\text{Id}, \mathfrak{S}_n\} \forall n \geq 5$ car > 0

Soit $H \trianglelefteq \mathfrak{S}_n$, $H \cap \mathfrak{S}_n \trianglelefteq \mathfrak{S}_n$ Grp A donc soit $H \cap \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{S}_n \subset H$ alors

$H = \mathfrak{S}_n$ ou $H = \mathfrak{S}_n$ ($|H| \mid |\mathfrak{S}_n|$ et $|\mathfrak{S}_n| \mid |H|$, $\frac{n!}{2} \leq |H| \leq n!$). Sinon $H \cap \mathfrak{S}_n = \{\text{Id}\}$

Si $\exists \sigma, \tau \in H \setminus \{\text{Id}\}$, $\sigma \tau, \sigma^2 \tau \in H \cap \mathfrak{S}_n$ donc $\sigma = \sigma^{-2} = \tau^{-2} = \tau$ et $H = \{\text{Id}, \sigma\}$.

On $\forall p \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\text{Id}\}$, $p \sigma p^{-1} \in H$ et $p \sigma p^{-1} = \sigma$ i.e. $\sigma \in \mathbb{Z}(\mathfrak{S}_n)$ et $\sigma = \text{Id}$. Alors $H = \{\text{Id}\}$.

Et $\text{sGN}(\mathfrak{S}_n) = \{\{\text{Id}\}, V_4, \mathfrak{S}_n\}$ car > 0 et réciproquement $\forall H \trianglelefteq \mathfrak{S}_n$, $H \neq \{\text{Id}\}$, on

raisonne sur le type de cycle de $\sigma \in H \setminus \{\text{Id}\}$, puisque H contient toute la

classe de conj de σ on a: σ transpo $\Rightarrow H = \langle \text{transpo} \rangle = \mathfrak{S}_n$; σ 3-cycle $\Rightarrow$

$\mathfrak{S}_n = \langle 3\text{-cycles} \rangle \subset H$ (et $H = \mathfrak{S}_n$ ou $H = \mathfrak{S}_n$); σ 2x2 transpo $\Rightarrow V_4 \subset H$ donc $4 \mid |H|$

et $|H| \in \{4, 8, 12, 24\}$ avec $|H| = 8$ imp (nbt élt dans classes conj 2) et $H \in \{V_4, \mathfrak{S}_n, H\}$

σ 4-cycle $\Rightarrow |H| \geq 7$ et $|H| \in \{8, 12, 24\}$ avec $|H| = 8$ imp.

Proposition: $\forall n \geq 3$, $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n$, $D(\mathfrak{S}_n) = V_4$ et $\forall n \geq 5$ $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n$.

On a $D(\mathfrak{S}_2) = D(\mathfrak{S}_3) = \{\text{Id}\}$ car Grp A. Soit $n \geq 3$, on a $\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ $[\sigma, \tau] \in \mathfrak{S}_n$

Donc $D(\mathfrak{S}_n) \subset \mathfrak{S}_n$ et $\forall (a, b, c) \in \mathfrak{S}_n$, $(a b c) = (a c b)^{-1} = (a c)(c b)(a c)(b c) = ((a c), (c b))$

d'où $\mathfrak{S}_n \subset D(\mathfrak{S}_n)$ et $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n$.

On a $D(\mathfrak{S}_4) = D(\mathfrak{S}_3) = D(\mathfrak{S}_2) = \{\text{Id}\}$ car Grp A. On a $D(\mathfrak{S}_4) \trianglelefteq \mathfrak{S}_4$ ou $\mathfrak{S}_4$ Grp A

donc $D(\mathfrak{S}_4) \in \{V_4, \mathfrak{S}_4\}$. Puisque $\mathfrak{S}_4 / D(\mathfrak{S}_4)$ pgrd quotient abélien $\mathfrak{S}_4 / V_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

et $\mathfrak{S}_4 / \mathfrak{S}_4 = \{\text{Id}\} \Rightarrow D(\mathfrak{S}_4) = V_4$. Et pour $n \geq 5$, $\mathfrak{S}_n$ simple non abélien, $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n$.