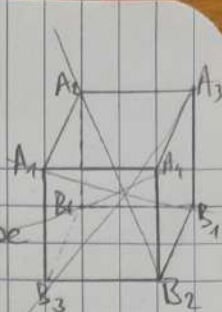


101 161
104 191
105
108

15:00"

Rombaldi
p. 88, 89
Combes
p. 175, 176, 176



Groupe des isométries du cube

$\mathcal{E}$ un R-EuE de dim 3, $C := A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4 \subset \mathcal{E}$ le cube

On pose $G := \text{Is}(C) = \{f \in \text{Is}(\mathcal{E}) \mid f(C) = C\}$, $G^+ = G \cap \text{Is}^+(\mathcal{E})$.

Thé: le groupe G^+ est isomorphe à $\mathcal{Y}_4$ et G isomorphe à $\mathcal{Y}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Plan Plan de dem: ① $\exists \varphi \in \text{Hom}(G^+, \mathcal{Y}_4)$; ② φ inj; ③ φ surj; ④ $G \cong \mathcal{Y}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Démo ① Soit $D := \{\Delta_i = [A_i B_i] \mid i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ l'ensemble des 4 diagonales de C .

On fait agir G^+ sur D : $G^+ \times D \rightarrow D$ d'où $\varphi: G^+ \rightarrow \mathcal{S}(D) \cong \mathcal{Y}_4$

Donc $\varphi \in \text{Hom}(G^+, \mathcal{S}(D))$ $(g, \Delta) \mapsto g(\Delta)$ $g \mapsto \varphi(g) (\Delta \mapsto g(\Delta))$

② Soit $g \in \text{Ker } \varphi$, on a $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ $g(\Delta_i) = \Delta_i$, donc on a 2 cas (raison de distance)

i) $g(A_1) = A_1 \Rightarrow g(B_1) = B_1$ car $g(\Delta_1) = \Delta_1$, on a donc $g(A_i) = A_i, g(B_i) = B_i$
 $\Rightarrow A_1 A_2 = A_1 g(A_2)$ car $g \in \text{Is}(\mathcal{E})$, $g(A_i) \in \{A_1, A_2, B_3\}$ et $g(\Delta_2) = \Delta_2 \Rightarrow g(A_2) = A_2$
Donc $g = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ car laisse fixe le repère affine $\{A_1, A_2, A_3, B_1\}$.

ii) $g(A_2) = B_1 \Rightarrow g(B_2) = A_1$, donc $g(A_i) = B_i$ et $g(B_i) = A_i$

Soit $\Omega = \text{IsoBax}(C)$ et $S_{\Omega} \in \text{Is}(\mathcal{E})$ la symétrie centrale de centre Ω

Donc $\varphi \circ S_{\Omega}$ fixe A_1 et B_1 , donc vérifie (i) et $\varphi \circ S_{\Omega} = \text{Id}_{\mathcal{E}}$, ie $\varphi = S_{\Omega} \in \text{Is}(\mathcal{E})$

On en déduit que φ est injective

③ Mq $\exists g \in G^+$ (rotation) tq $\varphi(g)$ soit une "transpo" ie $\varphi(g)$ bouge 2 diag seulement

Soit $g \in G^+$ rotation d'angle π et d'axe passant par les milieux de $[A_1, A_2], [B_1, B_2]$. On a $\varphi(g) = (\Delta_1, \Delta_2)$ transposition.

Donc φ est surj car son image contient les transp qui engendrent $\mathcal{Y}_4$

$\Rightarrow G^+ \cong \mathcal{Y}_4$ par φ

④ On a $G^+ \triangleleft G$ car $G^+ = \text{Ker}(\det)$, et $\langle S_{\Omega} \rangle \triangleleft G$ car noyau de $\varphi: G \rightarrow \text{Bij}(D)$

Avec $G^+ \cap \langle S_{\Omega} \rangle = \{\text{Id}\}$ et $|G^+| |\langle S_{\Omega} \rangle| = \frac{|G|}{2} \times 2 = |G|$, on en déduit

$G \cong G^+ \times \langle S_{\Omega} \rangle \cong \mathcal{Y}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Rq: Expliciter la correspondance $G^+ \leftrightarrow Y_4$

Elements de Y_4	Elements de G^+	Dessin
Transposition $(\Delta_i \Delta_j)$	Rotation d'angle π d'axe passant par les milieux $[A_i A_j], [B_i B_j]$	
3-cycles $(\Delta_i \Delta_j \Delta_k)$	Rotation d'angle $2\pi/3$ d'axe Δ_e	
4-cycles $(\Delta_i \Delta_j \Delta_k \Delta_l)$	Rotation d'angle $\pi/2$ d'axe passant par les centres des 2 faces opp	
Double Transp $(\Delta_i \Delta_j)(\Delta_k \Delta_l)$	Rotation d'angle π d'axe passant par les centres des 2 faces opp	

Rq: Pourquoi $g \in \text{Is}^+(C) = G^+$ preserve $\Delta \in D$

g preserve les distances et la distance entre 2 points est 1, $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$

Puisque les segments de longueur $\sqrt{3}$ sont les $\Delta \in D$, on a $g(\Delta) \in D$

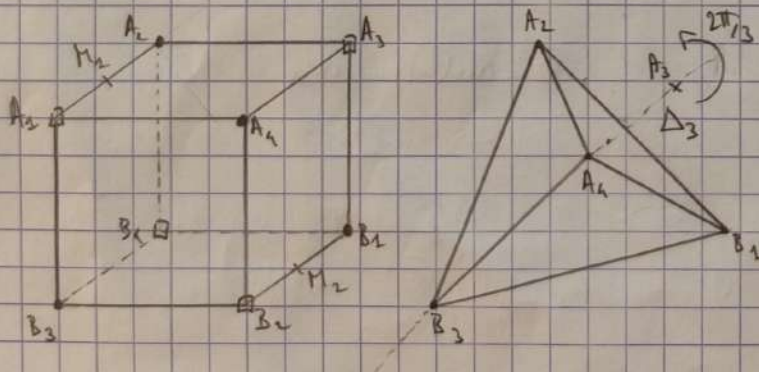
Rq: Pourquoi $g_{ij}(\Delta_e) = \Delta_e$ pour $i \neq e, j \neq e$

Pour $i=1, j=2$, on a $\Delta_3 \perp [M_1 M_2]$ où M_1 milieu de $[A_1 A_2]$, M_2 de $[B_1 B_2]$

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{A_3 B_3} \rangle &= \langle \overrightarrow{M_1 A_1} + \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{B_1 M_2}, \overrightarrow{A_3 A_4} + \overrightarrow{A_4 B_3} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_3 A_4} \rangle + \langle \overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_4 B_3} \rangle = 0 + 0 \end{aligned}$$

Et puisque g_{12} est d'axe $(M_1 M_2)$, on a $(M_1 M_2)^\perp = \text{Ker}(g_{12} - \text{Id})$

Rq: le carré contient 2 tétraèdres



Ref:

Nouvelles histoires hédonistes de groupe et géométrie, Tome 2, Caldeira