DÉVELOPPEMENT 5

DUAL DE $L^p([0,1],dx)$ POUR $1<p<2$

On considère un entier $1<p<2$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Lemme. — *Si $f\in L^2([0,1],dx)$ alors $f\in L^p([0,1],dx)$ et $\|f\|_p\leq\|f\|_2$.*

Démonstration. — Puisque $1<p<2$, on a $\frac{2}{p}>1$, soit r tel que $\frac{p}{2}+\frac{1}{r}=1$. On applique alors l'inégalité de Hölder à $|f|^p\,\mathbb{1}_{[0,1]}$ de sorte que

$$\left\||f|^p\,\mathbb{1}_{[0,1]}\right\|_1\leq\||f|^p\|_{\frac{2}{p}}\left\|\mathbb{1}_{[0,1]}\right\|_r\leq\||f|^p\|_{\frac{2}{p}}$$

i.e.

$$\int_0^1|f|^p\leq\left(\int_0^1(|f|^p)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{2}}=\|f\|_2^p$$

d'où $f\in L^p$ et $\|f\|_p\leq\|f\|_2$. □

Proposition. — *L'application $g\mapsto T_g$, où $T_g(f)=\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$, définit une isométrie linéaire de L^q sur $(L^p)'$.*

Démonstration. — Si $g\in L^q$ et $f\in L^p$ alors l'inégalité de Hölder donne

$$|T_g(f)|\leq\|g\|_q\,\|f\|_p$$

donc $T_g\in(L^p)'$ et $|||T_g|||\leq\|g\|_q$.

On considère u mesurable de module 1 telle que $g=u\,|g|$ et on pose $\varphi=\overline{u}\,|g|^{q-1}$. Comme $q=p(q-1)$, on a

$$\|\varphi\|_p^p=\int_0^1|g|^{(q-1)p}=\int_0^1|g|^q$$

d'où $\varphi\in L^p$ et il s'ensuit

$$\|T_g(\varphi)\|\leq|||T_g|||\,\|\varphi\|_p$$

i.e.

$$\int_0^1|g|^q\leq|||T_g|||\left(\int_0^1|g|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où

$$|||T_g|||\geq\left(\int_0^1|g|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}=\left(\int_0^1|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|g\|_q\,.$$

Ainsi $g\mapsto T_g$ est une isométrie de L^q dans $(L^p)'$.

Montrons que cette isométrie est surjective. Soit $\ell\in(L^p)'$. D'après le lemme, on a $L^2\subset L^p$ donc on peut considérer la restriction ψ de ℓ à L^2. Pour tout $f\in L^2$, on a

$$|\psi(f)|\leq|||\ell|||_p\,\|f\|_p\leq|||\ell|||_p\,\|f\|_2$$

i.e. $\psi \in (L^2)'$. Puisque L^2 est de Hilbert, il existe $g \in L^2$ telle que

$$\forall f \in L^2, \ell(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Pour conclure, il reste à montrer que $g \in L^q$ et que l'égalité précédente est vraie pour tout $f \in L^p$. Comme plus haut, on note $g = u\,|g|$ et, pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n = \overline{u}\,|g|^{q-1}\,\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}}$ de sorte que $f \in L^\infty$ et *a fortiori* $f \in L^2$. On a

$$\int |g|^q\,\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}} = \ell(f_n) \leq |||\ell|||_p\,\|f_n\|_p = |||\ell|||_p \left(\int |g|^q\,\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où

$$\left(\int |g|^q\,\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int |g|^q\,\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq |||\ell|||_p.$$

D'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int |g|^q\,\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^1 |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_q$$

donc $g \in L^q$ et $\|g\|_q \leq |||\ell|||$. Ainsi, on a

$$\forall f \in L^2, \ell(f) = T_g(f).$$

Les applications ℓ et T_g sont continues sur L^p or L^2 est dense dans L^p donc

$$\forall f \in L^p, \ell(f) = T_g(f)$$

i.e. $\ell = T_g$. □

Leçons concernées

01 Espaces de fonctions. Exemples et applications

05 Espaces complets. Exemples et applications

10 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications

12 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie

33 Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$

Référence

H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.

Sébastien Pellerin