Ref : Tenenbaum, p 40
Leçons : 223, 224, 230

# Ordre moyen de σ et de φ



**Def** : Un ordre moyen de $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tq $\sum_{n \leq x} f(n) \sim \sum_{n \leq x} g(n)$

## Théorème :

Un ordre moyen de $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ est $x \mapsto \frac{\pi^2}{6} x$ et $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \ln(x))$

Un ordre moyen de l'indicatrice d'Euler φ est $x \mapsto \frac{6}{\pi^2} x$ et $\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln(x))$

## démo :

Commençons par σ. On a : $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d = \sum_{\substack{m \leq x \\ n = dm}} \sum_{\substack{d \text{ tq} \\ dm \leq x}} d = \sum_{m \leq x} \frac{1}{2} \lfloor \frac{x}{m} \rfloor \left( \lfloor \frac{x}{m} \rfloor + 1 \right) = \sum_{m \leq x} \frac{1}{2} \left( \frac{x}{m} - \left( \frac{x}{m} - \lfloor \frac{x}{m} \rfloor \right) \right) \left( \frac{x}{m} - \left( \frac{x}{m} - \lfloor \frac{x}{m} \rfloor \right) + 1 \right)$

$$= \sum_{m \leq x} \frac{1}{2} \left( \frac{x}{m} \right)^2 + \overbrace{\left( \sum_{m \leq x} \frac{x}{m} \times \underbrace{\frac{1}{2} \times \left[ 1 - 2 \left( \frac{x}{m} - \lfloor \frac{x}{m} \rfloor \right) \right]}_{\in [-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]} \right)}^{A_1} + \overbrace{\left( \sum_{m \leq x} \underbrace{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x}{m} - \lfloor \frac{x}{m} \rfloor \right)^2 - \left( \frac{x}{m} - \lfloor \frac{x}{m} \rfloor \right) \right]}_{\in [-\frac{1}{8} ; 0]} \right)}^{A_2}$$

donc $-\frac{x}{8} \leq A_2 \leq 0$

donc $A_2 = O(x)$

donc $-\frac{1}{2} \sum_{m \leq x} \frac{x}{m} \leq A_1 \leq \frac{1}{2} \sum_{m \leq x} \frac{x}{m}$

Donc $\exists \alpha_x \in [-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$ tq $A_1 = \alpha_x \sum_{m \leq x} \frac{x}{m}$

Donc $A_1 = O(1) \sum_{m \leq x} \frac{x}{m}$

– Donc $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \sum_{m \leq x} \frac{1}{2} \left( \frac{x}{m} \right)^2 + O(1) \sum_{m \leq x} \frac{x}{m} + O(x)$

– Or, $\sum_{m \leq x} \frac{1}{2} \left( \frac{x}{m} \right)^2 = \frac{x^2}{2} \left( \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} - \sum_{m > x} \frac{1}{m^2} \right)$

On a : $\int_m^{m+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{m^2} \leq \int_{m-1}^{m} \frac{1}{t^2} dt$

donc $\int_{\lfloor x \rfloor + 1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{m > x} \frac{1}{m^2} \leq \int_{\lfloor x \rfloor}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$

$\frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ ; $\frac{1}{\lfloor x \rfloor} = O\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $\frac{1}{2} \sum_{m \leq x} \left( \frac{x}{m} \right)^2 = \frac{x^2}{2} \left( \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{x^2 \pi^2}{12} + O(x)$

Et $\sum_{m \leq x} \frac{x}{m} = x \sum_{m \leq \lfloor x \rfloor} \frac{1}{m} = x \left( \ln(\lfloor x \rfloor) + O(1) \right)$ On a : $\ln(\lfloor x \rfloor) = \ln(x - (x - \lfloor x \rfloor)) = \ln(x) + \ln\left(1 - \underbrace{\frac{x - \lfloor x \rfloor}{x}}_{= O(\frac{1}{x})}\right) = \ln(x) + O\left(\frac{1}{x}\right)$

car $\ln(1+u) \underset{u \to 0^+}{=} u + o(u)$

– Donc $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = x^2 \frac{\pi^2}{12} + O(x \ln(x)) + O(x) + O(1) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \ln(x))$.

Et pour $g(x) = \frac{\pi^2}{6} x$ on a $\sum_{n \leq x} g(n) \sim \int_0^x g(t) dt = \frac{\pi^2}{12} x^2 \sim \sum_{n \leq x} \sigma(n)$. □

– Continuons avec φ :

On a $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. On va avoir besoin du lemme :

**Lemme : Formule d'inversion de Moebius**

Soient $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tq $\forall n \geq 1$, $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$.

Alors, $\forall n \geq 1$, $g(n) = \sum_{d|n} f(d) \times \mu\left(\frac{n}{d}\right)$ où $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1; 0; 1\}$ est donnée par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ a un facteur carré} \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1 \times \dots \times p_r,\ p_i \text{ premiers.} \end{cases}$

Ainsi, $\varphi(n) = \sum_{md=n} m \times \mu(d)$.

Donc $\displaystyle\sum_{n\le x}\varphi(n) = \sum_{n\le x}\sum_{md=n} m\,\mu(d) = \sum_{md\le x}\mu(d)\,m = \sum_{d\le x}\mu(d)\Big(\sum_{m\le \frac{x}{d}} m\Big) = \sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{2}\times\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor+1\right)$

$\displaystyle = \sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{2}\times\frac{x^2}{d^2} + O(x\ln(x))$ par les mêmes arguments que précédemment + car $\mu(d)\in\{-1;0;1\}$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2}\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d^2} + O(x\ln(x))$

– Calculons $\displaystyle\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d^2}$ : La série associée est absolument convergente, et on a :

$$\Big(\sum_{d\ge1}\frac{\mu(d)}{d^2}\Big)\Big(\sum_{k\ge1}\frac{1}{k^2}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{kd=n}\frac{1}{k^2d^2}\mu(d) = \sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{d|n}\mu(d)\Big) = 1 \quad \text{car } \sum_{d|n}\mu(d) = \delta_{n,1}$$

pour $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$, on a $\sum_{k \text{ pair}}\binom{r}{k}$ termes avec $\mu(d)=1$, $\sum_{k \text{ impair}}\binom{r}{k}$ termes avec $\mu(d)=-1$. Donc la somme vaut $\sum\binom{r}{k}(-1)^k = (1-1)^r = 0$

Donc $\displaystyle\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d\ge1}\frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d>x}\frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2} + O(1)\sum_{d>x}\frac{1}{d^2} = \frac{6}{\pi^2} + O\Big(\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\Big) = \frac{6}{\pi^2} + O\Big(\frac{1}{x}\Big)$

car $\mu(d)\in\{-1;0;1\}$ et $\frac{1}{d^2}>0$

– Donc $\displaystyle\sum_{n\le x}\varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\ln(x))$. Et pour $g(x) = \frac{6}{\pi^2}x$, on a $\displaystyle\sum_{m\le x} g(m) \sim \int_0^x g(t)\,dt = \frac{3}{\pi^2}x^2 \sim \sum_{n\le x}\varphi(n)$. $\square$