

Développement : Théorème de Fejér

Référence : Carnet de voyage en Analystan, Caldero, page 114-118

Leçon : 246.

Soit E l'espace des fonctions continues, périodiques, de période 2π , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $n \geq 0$, on note

$$\sigma_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx}, \quad \text{et} \quad K_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j.$$

La fonction K_n , qui est bien dans E , est appelée noyau¹ de Fejér.

Lemme :

Pour tout entier naturel n , on a les formules suivantes

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(x) dx = 1 \quad \text{et} \quad K_n(x) = \frac{1}{n} \times \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

Démonstration. On sait que, pour tout entier k ,

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = 2\pi \delta_{0k}.$$

On en déduit l'égalité

$$\int_0^{2\pi} \sigma_k(x) dx = 2\pi.$$

La première formule de l'exercice découle alors de la linéarité de l'intégrale.

Pour la seconde formule, on note que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ implique $e^{ix} \neq 1$. On peut utiliser la formule de la série géométrique pour prouver que

$$\sigma_n(x) = e^{-inx} \frac{e^{(2n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{(n+1)ix} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1}.$$

Il en résulte l'expression escomptée de $K_n(x)$:

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n(e^{ix} - 1)} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{(j+1)ix} - e^{-jix}) \\ &= \frac{1}{n(e^{ix} - 1)} \left(e^{ix} \frac{e^{nix} - 1}{e^{ix} - 1} - e^{-(n-1)ix} \frac{e^{nix} - 1}{e^{ix} - 1} \right) \\ &= \frac{e^{ix}(e^{nix} - 1)}{n(e^{ix} - 1)^2} (1 - e^{-nix}) = \frac{\left(e^{\frac{nix}{2}} - e^{-\frac{nix}{2}} \right)^2}{n \left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right)^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{n \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

□

1. Il faut comprendre le mot noyau, appelé également noyau régularisant, comme un objet central, et non pas comme on l'entend en algèbre linéaire.

Théorème :

Soit f une fonction de E ; on pose

$$K_n * f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) K_n(y) dy,$$

alors la suite $(K_n * f)$ est une suite de fonctions polynomiales trigonométriques tendant vers f pour la norme uniforme de E .

Démonstration. ★ **Étapes n°1 :** Montrons que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur $[0, 4\pi]$ par le théorème de Heine, elle est donc uniformément continue sur $[0, 4\pi]$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [0, 2\pi]$, $|x - y| < \eta$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \delta := \min(\eta, 2\pi)$, on a qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x' := x - 2k\pi \in [0, 2\pi)$$

Posons $y' = y - 2k\pi$, supposons que $x \leq y$ donc $x' \leq y'$ et on a

$$y' = x' + (y - x) < 2\pi + \delta < 4\pi.$$

Ainsi $x', y' \in [0, 4\pi]$. De plus

$$|x' - y'| = |x - y| < \delta < \eta$$

Donc, par périodicité de f , on obtient

$$|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| < \varepsilon/2$$

Ainsi f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Pour la suite on se fixe un $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \eta$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

★ **Étapes n°2 :** Montrons que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |K_n * f(x) - f(x)| < 2\varepsilon$ pour n assez grand. On en déduit donc que la suite $(K_n * f)$ est une suite de fonctions de E tendant vers f pour la norme uniforme.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$.

Par le lemme, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) K_n(y) dy$. Ceci implique

$$K_n * f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x-y) - f(x)) K_n(y) dy.$$

Par le lemme, $K_n(x)$ est un réel positif. Il vient alors

$$|K_n * f(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-y) - f(x)| K_n(y) dy = I_1 + I_2 + I_3,$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta |f(x-y) - f(x)| K_n(y) dy, \\ I_2 &:= \frac{1}{2\pi} \int_\eta^{2\pi-\eta} |f(x-y) - f(x)| K_n(y) dy, \\ I_3 &:= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi-\eta}^{2\pi} |f(x-y) - f(x)| K_n(y) dy. \end{aligned}$$

Par le lemme et l'étape 1,

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} K_n(y) dy = \frac{\varepsilon}{2},$$

et de même $I_3 \leq \varepsilon/2$ (en utilisant la périodicité de f et K_n).

De plus, comme $\sin(t/2) \geq \sin(\eta/2)$ pour $\eta \leq t \leq 2\pi - \eta$,

$$I_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_\eta^{2\pi-\eta} |f(x-y) - f(x)| \frac{1}{n \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)} dy \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)},$$

où $\|f\|_\infty$ est la borne sup de f .

On en déduit en faisant la somme des inégalités

$$|K_n * f(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}.$$

Donc en passant au sup sur les $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |K_n * f(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}.$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|f\|_\infty}{n \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)} = 0,$$

on peut trouver n assez grand pour que l'on ait

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |K_n * f(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci implique bien que la suite $(K_n * f)$ tend vers f pour la norme uniforme.

Le fait que $K_n * f$ soit périodique résulte de sa définition, et le fait qu'elle soit continue provient des critères de continuité d'une fonction définie par une intégrale ; ici il est suffisant de voir que la fonction $f(x-y)K_n(y)$ est continue en x et en $t \in [0, 2\pi]$, qui est fermé borné.

□

Théorème :

Pour tout $n \geq 0$, soit

$$S_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad \text{où } c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iky} dy,$$

la n -ième somme partielle de Fourier de f , où les c_k désignent les coefficients de Fourier. On a

$$K_n * f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k,$$

On en déduit donc le théorème de Fejér, qui stipule que la moyenne arithmétique des sommes partielles de Fourier de la fonction continue périodique f converge uniformément vers f .

Démonstration. Par 2π -périodicité des fonctions, on a pour tout x

$$\int_0^{2\pi} f(y) e^{ik(x-y)} dy = - \int_x^{x-2\pi} f(x-y) e^{iky} dy = \int_{x-2\pi}^x f(x-y) e^{iky} dy = \int_0^{2\pi} f(x-y) e^{iky} dy.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) &= \frac{1}{n2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=-k}^k \int_0^{2\pi} f(y) e^{ij(x-y)} dy \\ &= \frac{1}{n2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=-k}^k \int_0^{2\pi} f(x-y) e^{ijy} dy \\ &= \frac{1}{n2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} f(x-y) \sigma_k(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) K_n(y) dy = K_n * f(x). \end{aligned}$$

Le théorème de Fejér découle alors directement du théorème précédent.

Notons au passage que $K_n * f$ est bien un polynôme trigonométrique. Par combinaison linéaire, il suffit de le montrer pour

$$I(x) := \int_0^{2\pi} f(x-y) e^{iky} dy,$$

mais le changement de variables $z = x - y$ nous donne

$$I(x) = -e^{ikx} \int_x^{x-2\pi} f(z) e^{-ikz} dz = e^{ikx} \int_0^{2\pi} f(z) e^{-ikz} dz,$$

qui est bien un polynôme trigonométrique. □