

Développement : Intégrale de Dirichlet

Référence : De l'intégration aux probabilités, GARET, page

Leçon : 235, 236 et 239.

Théorème :

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. ★ **Étapes n°1 :** Montrons d'abord que I est convergente :

- ★ La fonction $t \rightarrow \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et est donc localement intégrable sur cette ensemble.
- ★ D'après le taux de variation,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t) - \sin(0)}{t - 0} = \cos(0) = 1.$$

Donc, la fonction $t \rightarrow \frac{\sin(t)}{t}$ est intégrable en 0

- ★ Soit $M \geq \frac{\pi}{2}$, par intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\sin(t)}{t} dt &= \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_{\frac{\pi}{2}}^M + \int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\cos(t)}{t^2} dt \\ &= -\frac{\cos(M)}{M} + \int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\cos(t)}{t^2} dt \end{aligned}$$

De plus, pour tout $t \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$,

$$\left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2} \text{ qui est intégrable sur } [\frac{\pi}{2}, +\infty[\text{ (intégrale de Riemann convergente)}$$

Donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt < +\infty.$$

Par conséquent, on a la convergence de I (au sens de Riemann).

Remarque : On a que n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ car on peut montrer que

$$\forall n \geq 1, \int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt \sim \frac{2}{\pi} \ln(n).$$

Posons, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$$

et

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} . \end{aligned}$$

F est bien définie. En effet, pour $x = 0$ c'est le point précédent et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$|h(t, x)| \leq e^{-xt} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t) \text{ qui est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*.$$

★ **Étapes n°2** : Montrons que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (i) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \rightarrow h(x, t)$ est mesurable car continue et intégrable par ce qui précède,
- (ii) La fonction $x \rightarrow h(x, t)$ est dérivable pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
- (iii) Soit $\alpha > 0$, $x \in]\alpha, +\infty[$ et $t > 0$, on a

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = | -\sin(t)e^{-xt} | \leq e^{-xt} \leq e^{-\alpha t} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et ne dépend pas de } x.$$

On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on obtient donc pour tout $x > \alpha$,

$$F'(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} -\sin(t)e^{-xt} dt.$$

Donc, on en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On montre par un calcul (en passant par la partie imaginaire) que

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Puis en intégrant entre x et y , on obtient pour tout $x, y > 0$,

$$F(x) - F(y) = \arctan(y) - \arctan(x).$$

Comme $|F(y)| \leq \frac{1}{y}$ donc,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = 0.$$

D'où pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{\pi}{2}.$$

★ **Étapes n°3** : Montrons que F est continue sur $\mathbb{R}_+$:

On remarque que

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt + \operatorname{Im} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{(i-x)t}}{t} dt \right)$$

- ★ Comme $\left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq 1$ qui est intégrable sur $[0, 1]$, on peut appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale sur la première intégrale.

★ Pour la deuxième par une intégration par partie, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{(i-x)t}}{t} dt = \frac{e^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{(i-x)t}}{t^2} dt.$$

La continuité de $x \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{(i-x)t}}{t^2} dt$ découle du théorème de continuité car

$$\left| \frac{e^{(i-x)t}}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2} \text{ qui est intégrable sur } [1, +\infty[\text{ et ne dépend pas de } x.$$

Donc, F est continue par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(x) = F(0).$$

Donc,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

□