

Développement : Cauchy-Lipschitz Linéaire

Référence : Équation différentielle, Berthelin

Leçon : 221.

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$ et $B \in C(I, \mathbb{K}^n)$.

$$y' = A(t)y + B(t), \quad (t, y) \in I \times \mathbb{K}^n \quad (\text{L})$$

Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$. Alors il existe une unique solution $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ de (L) telle que $y(t_0) = y_0$.

Démonstration de l'unicité. Soient y et z deux solutions de (L) sur I avec $y(t_0) = y_0$. Alors y et z vérifient la formulation intégrale. En soustrayant ces deux formulations, nous obtenons :

$$y(t) - z(t) = \int_{t_0}^t A(s)(y(s) - z(s)) ds$$

Ceci entraîne, pour $t \in I, t \geq t_0$:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)(y(s) - z(s))\| ds \leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|y(s) - z(s)\| ds$$

Et pour $t \in I, t \leq t_0$:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \int_t^{t_0} \|A(s)(y(s) - z(s))\| ds \leq \int_t^{t_0} \|A(s)\| \|y(s) - z(s)\| ds$$

Ainsi, pour tout $t \in I$, il vient :

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|y(s) - z(s)\| ds \right|$$

Le lemme de Grönwall avec $u(t) = \|y(t) - z(t)\|$, $a = 0$ et $v = \|A(s)\|$ donne alors :

$$\|y(t) - z(t)\| \leq 0$$

Donc, par la séparabilité de la norme, $y = z$. □

Démonstration de l'existence. Commençons par le cas où I est un compact, notons $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$ avec $\alpha, \beta \geq 0$. Notons $E = C(I, \mathbb{K}^n)$ muni de la norme :

$$\|y\|_E = \sup_{t \in I} \|y(t)\|$$

pour laquelle E est complet. Pour $y \in E$, la fonction $t \rightarrow A(t)y(t) + B(t)$ est continue sur I dans $\mathbb{K}^n$, donc $\phi(y) \in E$. Soient $y, \tilde{y} \in E$. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\phi^p(y)$ et $\phi^p(\tilde{y})$ vérifient l'inégalité :

$$\|\phi^p(y)(t) - \phi^p(\tilde{y})(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_E, \quad \text{pour tout } t \in I$$

où $k = \sup_{t \in I} \|A(t)\|$ est une quantité finie car on est sur un compact.

- **Pour** $p = 0$: $\phi^0(y) = y$, $\phi^0(\tilde{y}) = \tilde{y} \in E$ et pour tout $t \in I$, $\|\phi^0(y)(t) - \phi^0(\tilde{y})(t)\| = \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \|y - \tilde{y}\|_E$.
- **Hérédité** : Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons le résultat au rang p . Par hypothèse $\phi^p(y) \in E$, donc $\phi^{p+1}(y) = \phi(\phi^p(y)) \in E$. Pour l'inégalité, avec $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}
\|\phi^{p+1}(y)(t) - \phi^{p+1}(\tilde{y})(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\phi^p(y)(s) - A(s)\phi^p(\tilde{y})(s)\| ds \\
&\leq k \int_{t_0}^t \|\phi^p(y)(s) - \phi^p(\tilde{y})(s)\| ds \\
&\leq k \int_{t_0}^t k^p \frac{|s - t_0|^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_E ds \\
&\leq k^{p+1} \frac{|t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|y - \tilde{y}\|_E
\end{aligned}$$

Posons $\gamma = \max(\alpha, \beta)$. Par l'inégalité démontrée par récurrence, on a :

$$\|\phi^p(y) - \phi^p(\tilde{y})\|_E \leq \frac{(k\gamma)^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_E$$

Comme la série $\sum \frac{(k\gamma)^p}{p!}$ converge, le terme général tend vers 0. Il existe donc un p_0 tel que ϕ^{p_0} soit contractante sur E . Par le corollaire du théorème du point fixe (théorème de Picard), il existe un unique point fixe, et donc une unique solution locale sur I .

Cas I quelconque : Pour tout intervalle J compact inclus dans I contenant t_0 , il existe une unique solution y_J . On définit y sur I par $y(t) = y_J(t)$ où J est un compact contenant t . Par unicité sur l'intersection de deux intervalles compacts, cette définition est cohérente. $\square$