

Développement : Methode de Newton

Référence : Petit guide de calcul différentiel, page 152

Leçon : 218, 219, 223, 226, 228 et 253.

Théorème :

Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 ; on suppose que $c < d$, $f(c) < 0$, $f(d) > 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. On considère la suite récurrente, $x_0 \in [c, d]$

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n \geq 0 \text{ avec } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Alors, il existe un unique zéro a de f et :

- (i) Il existe α tels que pour tout $x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha]$ la suite (x_n) converge quadratiquement,
- (ii) Si de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$ alors pour tout $x_0 \in [a, d]$, la suite (x_n) est strictement décroissante et

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et } x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$$

Démonstration. **1. Détermination du zéro et de la majoration :**

La fonction f , est continue sur $[c, d]$, croit strictement de $f(c) < 0$ à $f(d) > 0$, donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaire on a que f s'annule en un unique point $a \in [c, d]$. De plus, on a $F(a) = a$ et $F'(a) = 0$. (on s'attend donc à avoir $F(x) - a$ de l'ordre de $(x - a)^2$)

Soit $x \in [c, d]$,

$$\begin{aligned} F(x) - a &= x - a - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \text{ car } f(a) = 0 \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

En appliquant au numérateur la formule de Taylor à l'ordre deux d'origine x et d'extrémité a , il existe donc un $z \in]x, a[$ (ou $z \in]a, x[$) tel que

$$F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x - a)^2.$$

Posons

$$C = \frac{1}{2} \frac{\max_{x \in [c, d]} |f''(x)|}{\min_{x \in [c, d]} |f'(x)|}$$

, on obtient que pour tout $x \in [c, d]$,

$$|F(x) - a| \leq C|x - a|^2$$

2. Démontrons le point (i) :

Soit $\alpha > 0$ assez petit pour que $C\alpha < 1$ et que l'intervalle $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit contenu dans $[c, d]$. Alors pour $x \in I$ on a que

$$|F(x) - a| \leq C|x - a|^2 \leq C\alpha^2 < \alpha$$

d'où $F(I) \subset I$. Par conséquent si $x_0 \in I$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I$ et

$$|x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2,$$

d'où par une récurrence,

$$C|x_n - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}$$

et la convergence d'ordre deux de x_n vers a , puisque $C\alpha < 1$.

3. Montrons (ii)

On a que $f'' > 0$ sur $[c, d]$ donc f' est strictement croissante et f est fonction convexe sur l'intervalle $[c, d]$. Pour $a \leq x \leq d$ on a $f'(x) > 0$ et $f(x) \geq 0$ d'où

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x \text{ strict si } x > a,$$

et

$$F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x - a)^2 \geq 0 \text{ strict si } x > a.$$

Ces deux inégalités montrent que l'intervalle $I = [a, d]$ est stable par F et que, pour $a < x_0 \leq d$, les itérés x_n vérifient aussi $a < x_n \leq d$ et forment une suite strictement décroissante minorée. Donc la suite (x_n) admet donc une limite l qui vérifie $F(l) = l$ donc $f(l) = 0$ et par unicité du zéro on a que $l = a$.

De plus,

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$

Enfin cette inégalité est essentiellement optimale : si $a < x_0 \leq d$ on a $x_n > a$ pour tout n et

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

avec $x_n < z_n < a$. Donc comme $x_n \rightarrow a$ quand $n \rightarrow +\infty$ donc $z_n \rightarrow a$ quand $n \rightarrow +\infty$ et

$$\frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)}$$

□

