

Développement : Suite définies par récurrence

Référence : Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements, Bernis pages 151-153

Leçon : 2018, 223, 224, 226 et 230.

Théorème :

Soient un réel $b > 0$ et f une application de $[0, b]$ dans $\mathbb{R}$. on suppose que :

- (i) f est continue, croissante tels que pour tout $x \in]0, b]$, $f(x) < x$ et $f(0) = 0$.
- (ii) Il existe un réel $\lambda > 0$ et un réel $r > 1$ tels que :

$$f(x) = x - \lambda x^r + o_{x \rightarrow 0}(x^r).$$

Pour tout $c \in]0, b[$ la relation

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = c \end{cases}$$

définit une suite (u_n) à valeur dans $]0, b[$, de limite 0, de plus

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n^{\frac{1}{r-1}}}, \text{ où } K = (\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}.$$

Démonstration. On a que f est croissante et nulle en 0, donc, si f s'annulait en un point y de $]0, b[$, elle serait nulle sur $[0, y]$ ce qui est impossible par l'hypothèse (ii).

Par conséquent par le point (i), on a que pour tout $x \in]0, b[$,

$$0 < f(x) < x < b.$$

et donc f laisse $]0, b[$ stable, ce qui assure que la suite (u_n) est bien à valeur dans $]0, b[$.

De plus $0 < x_{n+1} = f(x_n) < x_n$ donc la suite (x_n) est strictement décroissante minorée par 0 donc elle converge vers un $l \in [0, b]$.

Mais comme f est continue, l est un point fixe de f c'est-à-dire $f(l) = l$ ce qui est possible que si $l = 0$.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Par (ii) on a que

$$\lambda \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r}$$

De plus la figure suggère que

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^r} dt = \frac{1}{1-r} (u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}).$$

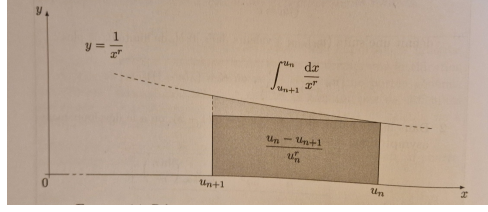


FIGURE 1 – Découverte heuristique de l'équivalent

Vérifions-le :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-r} (u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}) &= \frac{1}{1-r} (u_n^{1-r} - f(u_n)^{1-r}) \\ &= \frac{1}{1-r} [u_n^{1-r} - (u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r))^{1-r}] \\ &= \frac{1}{1-r} u_n^{1-r} [1 - (1 - \lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1}))^{1-r}], \end{aligned}$$

En utilisant que $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$, on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-r} (u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}) &= \frac{1}{1-r} u_n^{1-r} [(1-r)\lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})] \\ &= \lambda + o(1) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty. \end{aligned}$$

Par équivalence des sommes partielles de séries divergente à termes positif équivalent et télescopage :

$$\frac{1}{1-r} (u_0^{1-r} - u_n^{1-r}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-r} (u_k^{1-r} - u_{k+1}^{1-r}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda = n\lambda.$$

Donc, puisque la constante u_0^{1-r} est négligeable devant u_n^{1-r} ($r > 1$) on obtient que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{((r-1)\lambda n)^{\frac{1}{r-1}}}.$$

□

Théorème :

Dans le cas particulier où $f : x \rightarrow \ln(1+x)$, on a le développement asymptotique à deux termes :

$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{2 \ln(n)}{3n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n^2} \right)$$

Démonstration. L'application f proposée en exemple vérifie le point (i) (pour l'inégalité strict on utilise la stricte concavité du logarithme) et $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ assure (ii) avec $r = 2$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.

Donc, par la proposition on obtient que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

Pour aller plus loin poussons le développement de $\frac{1}{1-r}(u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r})$ c'est-à-dire $u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} &= f(u_n)^{-1} - u_n^{-1} \\ &= \left(u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{3}u_n^3 + o(u_n^3) \right)^{-1} - u_n^{-1} \\ &= u_n^{-1} \left(\left(1 - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2) \right)^{-1} - 1 \right) \end{aligned}$$

En utilisant que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ on obtient que

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} &= u_n^{-1} \left(\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{1}{4}u_n^2 + o(u_n^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}u_n + o(u_n) \end{aligned}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} - \frac{1}{2}$. D'après le calcul précédent :

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12}u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6(n+1)}.$$

Par équivalence des sommes partielles de séries divergente à termes de signe constant divergentes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6} \ln(n).$$

Donc, par télescopage

$$u_n^{-1} - u_0^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1}) = \frac{n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{n}{2} - \frac{1}{6} \ln(n) + o(\ln(n)).$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{6} \ln(n) + o(\ln(n)) \right)^{-1} \\ &= \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{3n} \ln(n) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right)^{-1} \\ &= \frac{2}{n} \left(1 + \frac{1}{3n} \ln(n) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right) \\ &= \frac{2}{n} + \frac{2}{3n} \ln(n^2) + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

□

Remarque : Montrons que

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

Soient $k \in \{1, \dots, n\}$ et $x \in [k, k+1]$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

Donc,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

et dont

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}.$$

Finalement

$$1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1 \text{ c'est-à-dire que } H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$