

Développement : Théorème de Riesz

Référence : Carnet de voyage en Analystan, Caldero, page 186-187

Leçon : 203, 206 et 208.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) espace vectoriel normé. On note la norme $\|\cdot\|$. E est de dimension finie si, et seulement si, la boule unité est compacte.

Démonstration. On procède en par double implication :

★ On montre l'implication.

On suppose que E est de dimension finie.

On a la boule de rayon 1 est forcément bornée pour la même norme (on n'a même pas besoin de dégainer le fait que toutes les normes sont équivalentes...)

Il reste à démontrer que la boule est fermée. Appelons N la norme (pour des raisons d'esthétique), alors la boule n'est rien d'autre que $N^{-1}([0, 1])$. Il suffit donc de montrer que N est continue. Mais ceci est clair car N est 1-lipschitzienne par l'inégalité triangulaire

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y).$$

★ Démontrons la réciproque. On suppose par le contraposée que E est un espace de dimension infinie et l'on veut montrer que la boule unité n'est pas compacte. On procède en plusieurs étapes :

★ **Étapes n°1 :** Soit F un sous-espace de dimension finie de E et a dans E . Montrons qu'il existe x dans F qui minimise $\|a - x\|$.

Soit

$$d(a, F) := \inf_{y \in F} \|a - y\|,$$

qui est bien définie puisque $\{\|a - y\| \mid y \in F\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Par définition de la borne inférieure, pour tout entier $n > 0$, il existe $x_n \in F$ tel que

$$d(a, F) \leq \|a - x_n\| < d(a, F) + \frac{1}{n}.$$

On a donc trouvé une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans F telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a - x_n\| = d(a, F).$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée puisque pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|x_n\| = \|x_n - a + a\| \leq \|x_n - a\| + \|a\| \leq d(a, F) + 1 + \|a\|.$$

Comme F est de dimension finie et que la suite est bornée dans F , elle possède une valeur d'adhérence (une boule en dimension finie est compacte) x dans F .

Soit $(x_{\gamma(n)})$ une suite extraite qui converge vers x . On a, par continuité de la norme,

$$\|a - x\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|a - x_{\gamma(n)}\| = d(a, F).$$

La borne inférieure est bien un minimum (parce que $x \in F$).

★ **Étapes n°2** : Soit $a \in E$, $u \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Démontrons les égalités suivantes :

$$d(a, F) = d(a - u, F), \quad d(\lambda a, F) = |\lambda|d(a, F).$$

Pour la première égalité, on va se permettre d'utiliser le changement de variable $y' = -u + y$, $y, y' \in F$. On a

$$\begin{aligned} d(a, F) &= \inf_{y \in F} \|a - y\| = \inf_{y' \in F} \|a - (y' + u)\| \\ &= \inf_{y' \in F} \|(a - u) - y'\| = d(a - u, F). \end{aligned}$$

Pour la seconde, on utilise le changement de variables $y = \lambda y'$ (car λ est non nul) :

$$\begin{aligned} d(\lambda a, F) &= \inf_{y \in F} \|\lambda a - y\| = \inf_{y' \in F} \|\lambda a - \lambda y'\| \\ &= |\lambda| \inf_{y' \in F} \|a - y'\| = |\lambda|d(a, F). \end{aligned}$$

★ **Étapes n°3** : Montrons qu'il existe un vecteur a de norme 1 dans E tel que $d(a, F) = 1$.

C'est une conséquence directe des deux égalités précédentes : soit b dans E , avec $b \notin F$, ce qui est possible puisque $E \neq F$, par considération de dimension.

On a donc $d(b, F) \neq 0$. En effet, $d(b, F) = \|b - x\|$ pour un $x \in F$, donc, en particulier, $x \neq b$.

On pose

$$a = b - x / \|b - x\|.$$

On a alors $\|a\| = 1$ et, de plus,

$$d(a, F) = d\left(\frac{b - x}{\|b - x\|}, F\right) = \frac{1}{\|b - x\|} d(b - x, F) = \frac{1}{\|b - x\|} d(b, F) = 1.$$

★ **Étapes n°4** : On va construire par récurrence une suite $(a_n)_n$ telle que pour tout n , on ait

$$\|a_n\| = 1, \quad \text{et} \quad d(a_n, F_{n-1}) = 1,$$

en posant $F_{n-1} = \text{vect}(a_0, \dots, a_{n-1})$. Puis on conclut.

On part d'un vecteur non nul arbitraire b_0 que l'on normalise en

$$a_0 := \frac{b_0}{\|b_0\|}.$$

Une fois les vecteurs $a_0, a_1, \dots, a_n$ déterminés, on définit par récurrence, grâce à la question qui précède, le sous-espace F_n engendré par $a_0, a_1, \dots, a_n$, et le vecteur a_{n+1} tel que $\|a_{n+1}\| = 1$ et $d(a_{n+1}, F_n) = 1$.

La suite $(a_n)_n$ est, par construction, dans la boule unité.

★ **Étapes n°5** : Montrons que l'on ne peut pas en extraire une sous-suite convergente.

On note que, pour tout $n > m$ dans $\mathbb{N}$,

$$\|a_n - a_m\| \geq d(a_n, F_m) \geq d(a_n, F_{n-1}) = 1.$$

Donc, aucune sous-suite de la suite $(a_n)_n$ ne peut être une suite de Cauchy. On en déduit que la boule unité n'est pas compacte. $\square$