

Développement : Théorème de Hahn-Banach géométrique dans un Hilbert

Référence : Objectif Agrégation. Vincent BECK, pages 97 et 133

Leçon : 181.

Lemme :

Soit H un espace de Hilbert réel, $C \subset H$ une partie (non vide) convexe et fermée et H' l'ensemble des formes linéaires continues sur H . Soit $x \notin C$. Alors il existe $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in C \quad f(x) < \alpha < f(y).$$

Démonstration. Considérons $a = p_C(x)$ la projection orthogonal de x sur C , et posons

$$f = \langle a - x, \cdot \rangle.$$

Puisque $x \notin C$, on $x \neq a$, ce qui implique que

$$f(a - x) = \|a - x\|^2 > 0,$$

et donc

$$f(a) > f(x).$$

Par ailleurs, la caractérisation angulaire nous dit exactement que

$$\forall y \in C, \quad f(a) \leq f(y).$$

Il suffit de poser

$$\alpha = \frac{1}{2}(f(x) + f(a)),$$

et on obtient

$$\forall y \in C, \quad f(x) < \alpha < f(a) \leq f(y)$$

ce qui achève la démonstration. □

Théorème :

Soient A et B deux convexes non vides disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors il existe un "Hyperplan qui sépare strictement" A et B c'est-à-dire qu'il existe $f \in H'$ tel que

$$\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{x \in B} f(x)$$

Démonstration. On se ramène au cas précédent, on pose

$$C = A - B = \{a - b, a \in A \text{ et } b \in B\}$$

de sorte que

- ★ C est convexe (vérification facile) ;
- ★ C est fermé. En effet soit (x_n) une suite de C qui converge vers $x \in H$. Alors il existe (a_n) et (b_n) tels que $a_n \in A$ et $b_n \in B$. Comme B est compact, il existe une sous suite $(b_{\varphi(n)})$ qui converge vers $b \in B$. On en déduit que la suite $(a_{\varphi(n)})$ converge vers $a \in H$ et comme A est fermé, on a $a \in A$. Ainsi $x = a - b$, donc $x \in C$;

$\star 0 \notin C$ puisque $A \cap B = \emptyset$

On peut donc alors séparer strictement 0 et C : il existe $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall y \in C, \quad 0 < \alpha < f(y),$$

c'est-à-dire

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad f(a) + \alpha < f(b).$$

On en déduit

$$\sup_{x \in A} f(x) + \alpha \leq \inf_{x \in B} f(x)$$

et finalement

$$\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{x \in B} f(x).$$

□

Proposition :

Soit H un $\mathbb{R}$ -espace de Hilbert et D une partie de H . Pour $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $H(f, \alpha)$ le demi-espace

$$H(f, \alpha) = \{y \in H, \quad f(y) \leq \alpha\}.$$

Alors, l'enveloppe convexe fermé de D est égale à l'intersection des demi-espaces qui contiennent D .

Remarque : On en déduit directement la caractérisation des convexes fermés : C est un convexe fermé si et seulement si $C =$ intersection des demi-espaces contenant C .

Démonstration. Soit I l'intersection des demi-espaces contenant D . Ainsi, I est l'intersection de convexes donc I est convexe. C'est aussi l'intersection de fermés donc I est fermée. On en déduit que

$$\overline{\text{co}}(D) \subset I.$$

Montrons que

$$\overline{\text{co}}(D)^C \subset I^C.$$

Soit $x \in \overline{\text{co}}(D)^C$. Séparons $A = \overline{\text{co}}(D)$ et $B = \{x\}$. D'après le théorème précédent, il existe $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in \overline{\text{co}}(D), \quad f(x) > \alpha > f(y).$$

Ainsi $H(f, \alpha)$ contient $\overline{\text{co}}(D)$ mais ne contient pas x donc $x \notin I$. Finalement $\overline{\text{co}}(D) = I$ □