

Développement : Théorème de Gauss-Lucas

Référence : Oraux X-ens 1, FRANCINOUE page 284-286

Leçon : 144 et 181.

Théorème :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .

Démonstration. On écrit

$$P = \mu \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i}$$

où $r \geq 1$, $\mu \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ sont les racines deux à deux distinctes de P et $n_1, \dots, n_r$ leur ordres de multiplicité respectif.

Comme

$$P' = \mu \sum_{i=1}^r n_i (X - \lambda_i)^{n_i-1} \prod_{l \neq i} (X - \lambda_l)^{n_l}$$

on a

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{X - \lambda_i}.$$

Prenons une racine z de P' . Si z est l'une des racines λ_i , elle est évidemment dans l'enveloppe convexe des racines de P . Sinon, on peut écrire

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{z - \lambda_i} = \sum_{i=1}^r n_i \frac{\overline{z - \lambda_i}}{|z - \lambda_i|^2}$$

ce qui donne en passant au conjugué

$$\sum_{i=1}^r n_i \frac{z - \lambda_i}{|z - \lambda_i|^2} = 0$$

puis

$$z = \frac{\sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z - \lambda_i|^2} \lambda_i}{\sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z - \lambda_i|^2}}$$

Comme chaque $\frac{n_i}{|z - \lambda_i|^2}$ est strictement positif, cette formule exprime le fait que z est un barycentre à coefficient strictement positif de λ_i . La racine z de P' est donc dans l'enveloppe convexe des racines de P $\square$

Application :

Soit $n \geq 2$ et

$$P = (X + 1)^n - X^n - 1.$$

Alors le plus grand entier n tel que les racines non nulles de P soient de module 1 est 7.

Démonstration. Si $n = 2$, P a une seule racine 0. Pour $n \geq 3$, on a

$$P' = n(X + 1)^{n-1} - nX^{n-1}.$$

Si z est une racine de P' , on remarque que z ne peut pas être nul donc

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n-1} = 1.$$

Ainsi, il existe $k \in \{0, \dots, n-2\}$ tel que

$$\frac{z+1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}.$$

Or $z+1 \neq z$ donc $k \neq 0$. On en déduit donc que les $n-2$ racines de P' sont les nombres complexes

$$z_k = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{n-1}}}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)} \quad 1 \leq k \leq n-2.$$

Si toutes les racines de P sont de module 1, les racines de P' sont nécessairement dans le disque unité, puisque ce sont des barycentre à coefficients positifs des racines de P .

Le module de z_1 est

$$\frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right)}$$

et pour $n \geq 8$, on a

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right) < 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

Donc, $|z_1| > 1$. Ainsi un entier $n \geq 8$ ne convient pas.

Regardons

$$P_0 = (X+1)^7 - X^7 - 1.$$

Visiblement, -1 et 0 sont racines de P_0 qui s'écrit

$$P_0 = X(X+1)(7X^4 + 14X^3 + 21X^2 + 14X + 7)$$

Posons, le polynôme $Q = 7X^4 + 14X^3 + 21X^2 + 14X + 7$. Soit $Y = X + \frac{1}{X}$ alors,

$$Q = X^2(7Y - 14 - 14Y + 21) = 7X^2(Y - 1)^2$$

Une racine z de P_0 distincte de 0 et -1 doit vérifier

$$z + \frac{1}{z} - 1 = 0,$$

ce qui équivaut à

$$z^2 - z + 1 = 0$$

Donc si $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $z = -j$ ou $z = -j^2$. L'ensemble des racines de P_0 est donc

$$\{0, -1, -j, -j^2\}$$

qui est contenue dans le disque unité. Le plus grand entier n pour lequel $(X+1)^n - X^n - 1$ a toutes ses racines non nulles de modules 1 est $n_0 = 7$. $\square$