

Développement : Décomposition polaire

Référence : Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, pages 739-742

Leçon : 106 et 157.

Théorème :

Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe alors une unique $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Démonstration. La matrice A étant symétrique positive a toutes ses valeurs propres réelles positives et est diagonalisable dans une base orthonormée, ce qui signifie qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $A = PD^tP$, avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

En posant

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = P\Delta^tP,$$

on a $B^2 = A$, la matrice B étant symétrique positive (ses valeurs propres sont positives).

Si φ est le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $\varphi(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (le degré de φ est $p-1$ où p est le nombre de valeurs propres distinctes de A), alors $\varphi(A) = P\varphi(D)^tP = P\Delta^tP = B$. C'est-à-dire que B est polynomiale en A .

Si C est une autre racine carrée de A symétrique positive, on a alors $C^2 = A$ et C commute avec A , donc avec B . En définitive les matrices B et C commutent et sont symétriques, on sait alors qu'elles sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice Q dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $C = Q\Gamma^tQ$ et $B = Q\Lambda^tQ$ avec Γ et Λ diagonales à coefficients réels positifs. De $C^2 = A = B^2$, on déduit alors que $\Gamma^2 = \Lambda^2$ et $\Gamma = \Lambda$ du fait que ces matrices sont diagonales à coefficients réels positifs. Et en définitive $B = C$. $\square$

Remarque : Avec les notations du théorème, on dit que B est la racine carrée positive de $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Cette racine carrée B est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème :

Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive.

Démonstration. Si $A = \Omega S$, alors ${}^tAA = S^t\Omega\Omega S = S^2$ et S est la racine carrée positive de la matrice symétrique définie positive tAA ($\langle {}^tAAx \mid x \rangle = \|Ax\|^2 > 0$ pour x non nul).

La matrice Ω est alors donnée par $\Omega = AS^{-1}$ (A inversible entraîne S inversible). On a donc, en cas d'existence, l'unicité des matrices Ω et S .

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors tAA est symétrique définie positive et elle admet une unique racine carrée symétrique définie positive S . En posant $\Omega = AS^{-1}$, on a $A = \Omega S$ et

$${}^t\Omega\Omega = {}^t(S^{-1})({}^tAA)S^{-1} = (S^{-1})S^2S^{-1} = S^{-1}S = I_n,$$

c'est-à-dire que Ω est orthogonale. $\square$

Lemme :

L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles orthogonales est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme matricielle $\|\cdot\|$ induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Du fait qu'une transformation orthogonale conserve la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, on déduit que pour toute matrice orthogonale A , on a $\|A\| = 1$. On déduit donc que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$.

De plus cet ensemble est fermé comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par l'application continue $A \mapsto {}^tAA$. En conclusion $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ en tant que fermé borné (on est en dimension finie). $\square$

Théorème :

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique positive.

Démonstration. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$ où $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles.

Avec le théorème de décomposition polaire, on peut écrire pour tout entier k , $A_k = \Omega_k S_k$ où $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices orthogonales et $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices symétriques définies positives.

De la suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on peut extraire une sous-suite $(\Omega_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

De $S_k = \Omega_k^{-1} A_k = {}^t \Omega_k A_k$ et de la continuité du produit matriciel, on déduit que la suite $(S_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente.

La limite S de cette suite est une matrice symétrique positive et $A = \Omega S$. $\square$

Si A est de rang $r < n$, alors la décomposition ci-dessus n'est pas unique. En effet, on peut diagonaliser la matrice symétrique positive S dans une base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $S e_i = \lambda_i e_i$ pour $1 \leq i \leq n$ où $\lambda_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n - r$ et $\lambda_i > 0$ sinon (si A n'est pas inversible alors il en est de même de S et 0 est valeur propre de S). Les Ωe_i sont alors uniquement déterminés pour $n - r + 1 \leq i \leq n$, mais pour $1 \leq i \leq n - r$ il n'y a pas unicité. $\square$

Théorème :

L'application $(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \Omega S \in GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Démonstration. On sait déjà que toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On en déduit alors que l'application $\varphi : (\Omega, S) \mapsto \Omega S$ réalise une bijection de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$. Cette application est continue car ses composantes sont des fonctions polynomiales des coefficients ω_{ij} de Ω et s_{rp} de S . Il reste à montrer que φ^{-1} est continue.

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A . On note $\varphi^{-1}(A_k) = (\Omega_k, S_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi^{-1}(A) = (\Omega, S)$. De la suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on peut extraire une sous-suite $(\Omega_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $\Omega' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. De

$S_k = {}^t\Omega_k A_k$, on déduit que la suite $(S_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $S' = {}^t\Omega' A$. La matrice S' est symétrique positive comme limite d'une suite de matrices symétriques positives et elle est définie puisque inversible. On a alors la décomposition polaire $A = \Omega' S'$. Cette dernière décomposition étant unique, on a nécessairement $\Omega' = \Omega$.

On a donc ainsi montré que la suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Elle converge donc vers Ω et $(S_k)_{k \in \mathbb{N}} = ({}^t\Omega_k A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers ${}^t\Omega A = S$. C'est-à-dire que la suite $((\Omega_k, S_k))_{k \in \mathbb{N}} = (\varphi^{-1}(A_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $(\Omega, S) = \varphi^{-1}(A)$ et φ^{-1} est continue. $\square$