

Développement : Simplicité du groupe Alterné

Référence : Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rmabaldi, page 50-51

Leçon : 103 et 105.

Théorème :

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 3$.

Le groupe $\mathcal{A}(E)$ est simple si et seulement si $n \neq 4$

Démonstration. **Commençons pour $n = 3$:** $\mathcal{A}(E)$ est cyclique d'ordre 3 et a que comme sous groupe lui même et $\{Id_E\}$.

Pour $n = 4$ (*Algèbre le grand combat*), notons $E = \{a, b, c, d\}$.

Posons $H = \{Id_E, (a, b)(c, d), (a, c)(b, d), (a, d)(b, c)\}$. On peut montrer que H est un sous groupe distingué de $\mathcal{A}(E)$ et comme le conjugué d'une double transposition de support disjoint est une double transposition à support disjoint on a que H est distingué dans $\mathcal{A}(E)$ donc $\mathcal{A}(E)$ n'est pas distingué.

Soit $n \geq 5$. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}(E)$ distinct de $\{Id_E\}$. Pour montrer que $H = \mathcal{A}(E)$, il suffit de montrer que H contient un 3-cycle puisqu'ils sont tous conjugués dans $\mathcal{A}(E)$ et l'engendrent.

On se donne $\sigma \in S(H) \setminus \{Id_E\}$, il existe $x \in H$ tel que $y := \sigma(x) \neq x$. On se donne $z \in E \setminus \{x, y, \sigma(y)\}$ (E a au moins 5 éléments) et u le 3-cycle $(x, y, z) \in \mathcal{A}(E)$.

On a alors

$$\sigma u(x) = \sigma(y) \text{ et } u\sigma(x) = u(y) = z \neq \sigma(y)$$

On obtient donc que σ et u ne commutent pas.

Comme H est distingué dans $\mathcal{A}(E)$, on a

$$\sigma' := \sigma u \sigma^{-1} u^{-1} = \underbrace{\sigma}_{\in H} \underbrace{(u \sigma^{-1} u^{-1})}_{\in H} \in H.$$

Or,

$$\begin{aligned} \sigma' &= (\sigma(x, y, z) \sigma^{-1})(z, y, x) \\ &= (\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))(z, y, x) \\ &= (y, \sigma(y), \sigma(z))(z, y, x) \end{aligned}$$

On voit que σ' est produit de deux 3-cycles qui agissent sur l'ensemble $F = \{x, y, z, \sigma(y), \sigma(z)\}$ formé d'au plus 5 éléments (tous les points de $E \setminus F$ sont fixes)

- ★ L'égalité $\sigma' = Id_E$ est réalisée si et seulement si $u\sigma = \sigma u$, ce qui est impossible donc $\sigma' \neq Id_E$.
- ★ Dans $S(F)$ la permutation σ' s'écrit comme produit de cycles de supports disjoints, cette décomposition étant celle de $S(E)$ et comme $\sigma' \in \mathcal{A}(E)$, il n'y a que trois possibilité :
 1. σ' est un 3-cycle
 2. σ' est un produit de deux transposition de support disjoint
 3. σ' est un 5-cycles

Dans le premier cas c'est terminée

Dans le second cas, on a $\sigma' = (x_1, x_2)(x_3, x_4)$ et en choisissant $x_5 \in E \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ on a :

$$\begin{aligned}
\sigma'' &:= \sigma'(x_1, x_2, x_5)(\sigma')^{-1}(x_5, x_2, x_1) \\
&= \underbrace{\sigma'}_{\in H} \underbrace{(x_1, x_2, x_5)(\sigma')^{-1}(x_5, x_2, x_1)}_{\in H} \in H \text{ car } H \text{ est distingué} \\
&= (\sigma'(x_1), \sigma'(x_2), \sigma'(x_5))(x_5, x_2, x_1) \\
&= (x_2, x_1, x_5)(x_5, x_2, x_1) \\
&= (x_1, x_2, x_5)
\end{aligned}$$

et c'est terminée.

Dans le troisième cas, on a $\sigma' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ et

$$\begin{aligned}
\sigma'' &:= \sigma'(x_1, x_2, x_3)(\sigma')^{-1}(x_3, x_2, x_1) \\
&= \underbrace{\sigma'}_{\in H} \underbrace{(x_1, x_2, x_3)(\sigma')^{-1}(x_3, x_2, x_1)}_{\in H} \in H \text{ car } H \text{ est distingué} \\
&= (\sigma'(x_1), \sigma'(x_2), \sigma'(x_3))(x_3, x_2, x_1) \\
&= (x_2, x_3, x_4)(x_3, x_2, x_1) \\
&= (x_1, x_4, x_2)
\end{aligned}$$

et c'est terminé

□