

Développement : Théorème spectral

Référence : Algèbre linéaire, Joseph GRIFONE (7 édition) pages 254-255

Leçon : 152, 157 et 158.

Théorème :

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien se diagonalise dans une base orthonormée.

Démonstration. La démonstration se passe en plusieurs étapes :

★ **Étapes n°1 :** Montrons que toutes les valeurs propres de f sont réelles.

Soit A la matrice qui représente f dans une base orthonormée et λ une valeur propre, réelle ou complexe, de A (λ existe car $P_A(X)$, considéré comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$, admet, d'après

le théorème de D'Alembert, au moins une racine). Montrons que $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ la matrice d'un vecteur propre v correspondant à λ . Puisque A est symétrique, on a :

$${}^t(AX)\overline{X} = {}^tX A \overline{X} \quad (*)$$

D'autre part $AX = \lambda X$, d'où $\overline{AX} = \overline{\lambda X}$ et, comme A est réelle, $A \overline{X} = \overline{\lambda X}$. En reportant dans (*) :

$${}^t(\lambda X)\overline{X} = {}^tX \overline{\lambda X}$$

c'est-à-dire

$$\lambda(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2) = \overline{\lambda}(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)$$

et donc $\lambda = \overline{\lambda}$, puisque $v \neq 0$. Les valeurs propres sont donc réelles.

★ **Étapes n°2 :** Montrons, qu'il existe un vecteur propre dans E pour la valeur propre λ

On sait qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$AX = \lambda X.$$

Écrivons $X = X_R + iX_I$ où les X_R et X_I sont respectivement les parties réelle et imaginaire des coordonnées de X non nul et appartient à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. On a donc

$$AX_R + iAX_I = \lambda X_R + i\lambda X_I.$$

Ainsi si $X_R = 0$, on prend X_I comme vecteur propre, sinon on prend X_R (remarque on ne peut pas avoir $X_R = X_I = 0$ car $X \neq 0$).

★ **Étapes n°3 :** Montrons, par récurrence sur la dimension n de E , qu'il existe une base de vecteurs propres.

Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons la propriété vraie à l'ordre $n - 1$. Soit λ une valeur propre de f , $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre correspondant à λ et $H = \text{Vect}\{x\}^\perp$. Notons que : $\dim H = n - 1$.

— Tout d'abord, H est stable par f , c'est-à-dire $f(H) \subset H$. En effet soit $y \in H$ (c'est-à-dire $y \perp x$) ; il s'agit de montrer que $f(y) \in H$, c'est-à-dire $f(y) \perp x$. On a :

$$\langle f(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle = \lambda \langle y, x \rangle = 0, \text{ puisque } y \perp x;$$

donc $f(y) \perp x$. Ainsi la restriction $\tilde{f}$ de f à H est un endomorphisme de H .

— Par ailleurs $\tilde{f}$ est un endomorphisme autoadjoint de H (pour la restriction du produit scalaire à H), car si $v, w \in H$

$$\langle \tilde{f}(v), w \rangle_H = \langle f(v), w \rangle_E = \langle v, f(w) \rangle_E = \langle v, \tilde{f}(w) \rangle_H$$

Or $\dim H = n-1$, ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\{e_2, \dots, e_n\}$ formée de vecteurs propres de $\tilde{f}$. Il est clair que $\{x, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de E formée de vecteurs propres de f .

★ **Étapes n°4** : Montrons que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Soient v_1 et v_2 vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_1, λ_2 , avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Montrons que $v_1 \perp v_2$. On a :

$$\langle f(v_1), v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$$

or f est autoadjoint, donc :

$$\langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$$

Ainsi : $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$ et puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a : $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. □

★ **Étapes n°4** : Construction de la base orthonormée.

Pour construire la base orthonormée de vecteurs propres, il suffit de prendre une base orthonormée dans chaque espace propre. □

REMARQUE. — Les matrices symétriques **complexes** (non réelles) ne sont pas nécessairement diagonalisables (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$).

Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On a : $P_A(X) = X^2 - \beta X - \alpha^2$. Si $\beta^2 + 4\alpha^2 = 0$ (dans $\mathbb{C}$ cela est possible sans que α et β soient tous deux nuls), on aura deux racines confondues, c'est-à-dire une valeur propre double $\lambda = \beta/2$ et donc $P_A(X) = (X - \beta/2)^2$. A serait alors diagonalisable si et seulement si $m_A(X) = X - \beta/2$ c'est-à-dire $A = (\beta/2)I$ ce qui évidemment est exclu. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique et non diagonalisable.