

Dev n° 39

+ internet

Titre: Développements limités usuels au voisinage de 0Ex:

$$\textcircled{1} \forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\textcircled{2} \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{n! 2^n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Rappel:

$$\bullet \forall x \in [-1, 1], \exists! y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ t.q. } \sin y = x \quad (\Rightarrow) \quad \arcsin x = y.$$

On a :

$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin(\sin(y)) = x.$$

• Prop:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

Démon:① Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et x au voisinage de 0.Posons $g(x) = (1+x)^\alpha$.On a $g \in C^\infty$ donc dérivable n fois ($n \in \mathbb{N}$).

On a :

$$g^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$\text{Et } g^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).$$

Par la formule de Taylor-Young on obtient que le DL de g en 0 est :

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} (x-0)^k + o(x^n)$$

On a donc le résultat souhaité.

② Pour déterminer le DL de $\arcsin$, on va m.q.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et utiliser que :

$$f(x) = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{k! 2^k} x^{2k} + o(x^{2n}).$$

* Dérivation:Pour $x \in [-1, 1]$, on a :

$$\sin(\arcsin(x)) = x \Rightarrow 1 = \sin'(\arcsin(x)) \arcsin'(x) \\ = \cos(\arcsin(x)) \arcsin'(x)$$

$$\Rightarrow \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

* DL de f:

- Ici $\alpha = -\frac{1}{2}$, et au voisinage de 0, on a par ① que :

$$\begin{aligned}(1+u)^{-1/2} &= \sum_{k=0}^n \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} u^k + o(u^k) \\&= \sum_{k=0}^n \frac{-1(-1-2)\dots(-1-2k+2)}{k! 2^k} u^k + o(u^k) \\&= \sum_{k=0}^n \frac{-1(-3)\dots(-2k+1)}{k! 2^k} u^k + o(u^k) \\&= \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{k! 2^k} (-1)^k u^k + o(u^k)\end{aligned}$$

- En posant $u = -x^2$ et en utilisant la prop. de composition dans les DL on obtient:

$$\begin{aligned}(1-x^2)^{-1/2} &= \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{k! 2^k} (-1)^k (-x^2)^k + o(u^k) \\&= \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{k! 2^k} x^{2k} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

* Intégration:

En utilisant les propriétés d'intégration des DL on a que la primitive de f est :

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{k! 2^k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

* Conclusion:

On obtient bien :

$$\arcsin(x) = F(x). \quad \square$$

Annexe:

* Prop. composition DL:

Proposition 7

Soient f et g deux fonctions qui admettent des développements limités à l'ordre n en 0 :

$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k + x^n \epsilon_1(x)$, $g(x) = Q(x) + x^n \epsilon_2(x)$ avec $Q(0) = 0$, alors $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(g(x)) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k [Q^k]_n(x) + x^n \epsilon_3(x)$$

où $[Q^k]_n$ est composé des termes de degré inférieur ou égal à n du polynôme Q^k .

Attention à la condition $Q(0) = 0$; si elle n'est pas vérifiée, on ne peut même pas, sans autre information, savoir si $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre 0 en 0...

* Prop. intégration DL:

Proposition 8

Soit f une fonction dérivable sur un voisinage $V(0)$ de 0, dont la dérivée f' admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

Proposition 8

Soit f une fonction dérivable sur un voisinage $V(0)$ de 0, dont la dérivée f' admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k + x^n \epsilon_1(x),$$

alors f admet un développement limité à l'ordre $(n+1)$ en 0 :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + x^{n+1} \epsilon_2(x).$$

* DL usuels :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1} \epsilon(x),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p} \epsilon(x),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1} \epsilon(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p} \epsilon(x),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1} \epsilon(x),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \epsilon(x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1} \epsilon(x),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et à chaque fois $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$

* Formules :

Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que f est $n-1$ -fois dérivable dans un voisinage de a et que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + o(h^n).$$

Formule de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a, b \in I$. On suppose que f est n fois dérivable sur le segment $[a, b]$, et $n + 1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On peut en déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange : sous les mêmes hypothèses, s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f^{(n+1)}(y)| \leq M$ pour tout $y \in]a, b[$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

L'un des intérêts de l'inégalité de Taylor-Lagrange est qu'elle reste vraie pour les fonctions à valeurs complexes (et même à valeurs dans un espace vectoriel normé) contrairement à l'égalité de Taylor-Lagrange.

Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors

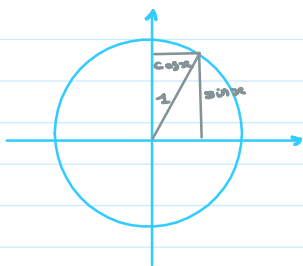
$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

* Prop:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Démo:

• Méthode 1:



Par pythagore $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

• Méthode 2: $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$
 $f'(x) = -\cos(x)\sin(x) + \cos(x)\sin(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \text{cst} = f(0) = 1.$

• Méthode 3: $1 = \cos(x-x) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x)$
 $= \cos^2(x) + \sin^2(x)$
(Rappel: $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$)

* Dérivée de cos et sin:

Démo:

• On a:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \sin(h) (-\sin(x)) + \cos(x) \cos(h) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1} (-\sin(x)) + \cos(x) \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \frac{\cos(h) - 1}{h} \cdot \frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1} \\ &= \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} \\ &= \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} \\ &= \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1} \cdot \underbrace{\frac{-\sin(h)}{\cos(h) + 1}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \end{aligned}$$

← car

Donc, on a bien $\cos'(x) = -\sin(x)$.

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\sin(h) + \sin(x)\cos(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \sin(x) \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} + \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1} \cos(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos(x). \end{aligned}$$

Ex: x voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$.

$$\textcircled{1} \forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\textcircled{2} \arcsin(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{n! 2^n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Rappel:

- $\forall x \in]-1; 1[, \sin(\arcsin(x)) = x$
- Prop: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

Démo:

$\textcircled{1}$ Posons $g(x) = (1+x)^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$g^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$\Rightarrow g^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$$

Par la formule de Taylor-Young:

$$(x+1)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} (x-0)^k + o(x^n)$$

$\textcircled{2}$ M.q.:

$$\bullet \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$$

$$\bullet f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n})$$

* Dérivée:

On a

$$x = \sin(\arcsin(x)) \Rightarrow 1 = \sin'(\arcsin(x)) \arcsin'(x)$$

$$\Rightarrow \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

* DL de f:

On a ici $\alpha = 1/2$.

$$(1+u)^{1/2} = \sum_{k=0}^n \frac{1/2 \cdot (1/2-1) \dots (1/2-k+1)}{k!} u^k + o(u^k)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2^k k!} u^k + o(u^k)$$

En posant $u = -x^2$ et par proposition de composition de DL on a le résultat.

* Intégration:

En intégrant, on obtient:

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2^k k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2})$$

□