

Dev n° 33Titre: Nombre de partitions à parts fixesThm:

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ nb premiers entre eux dans leur ensemble.
 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le nb de solutions $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de
 l'éq. $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n$.
 Alors, $S_n \sim \frac{n^{p-1}}{\alpha_1 \dots \alpha_p (p-1)!}$

Demo:* Problème:

Considérons la série entière définie par le produit de Cauchy:

$$\left(\sum_{n_1 \in \mathbb{N}} z^{\alpha_1 n_1} \right) \dots \left(\sum_{n_p \in \mathbb{N}} z^{\alpha_p n_p} \right).$$

On r.q. que le coef. de z^n dans ce produit de Cauchy est le nb de manière de combiner les puissances de z de chaque terme du produit par que leur somme fasse n .

Ainsi, on a:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n \\ &= \left(\sum_{n_1=0}^{+\infty} z^{\alpha_1 n_1} \right) \dots \left(\sum_{n_p=0}^{+\infty} z^{\alpha_p n_p} \right) \\ &= \frac{1}{1-z^{\alpha_1}} \dots \frac{1}{1-z^{\alpha_p}} \quad \text{avec rayon de convergence 1} \end{aligned}$$

* Étude des pôles de F:La fonction F est une fonction holomorphe dont les pôles sont racines α_i -èmes de l'unité.

De plus,

* 1 est un pôle d'ordre p * soit $w \neq 1$ un pôle de F . Supposons par l'absurde que l'ordre de w est p .Alors, $w^{\alpha_1} = \dots = w^{\alpha_p} = 1$.Or w peut s'écrire sous la forme $w = e^{2i\pi a/b}$ avec $a/b = 1$.On obtient donc $b \mid a \alpha_i$, $\forall i$, or par le lemme de Gauss, $b \mid \alpha_i$, $\forall i$.Les α_i étant premiers entre eux dans leur ensemble $\Rightarrow b = 1$.Donc $w = 1$. ABSURDEDonc w est un pôle d'ordre $< p$.* Réécriture de F:On peut donc écrire la décomposition en éléments simples de F sous la forme:

$$F(z) = \frac{A}{(1-z)^p} + \underbrace{\sum_{w \text{ pôle}} \frac{a_{1,w}}{w-z} + \dots + \frac{a_{p-1,w}}{(w-z)^{p-1}}}_{\dots}$$

$$F(z) = \frac{A}{(1-z)^p} + \underbrace{\sum_{w \neq 1} \frac{a_{1,w}}{w-z} + \dots + \frac{a_{p-1,w}}{(w-z)^{p-1}}}_{:= G(z)}$$

* Étude de G:

Rq: on a par $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(w-z)^k} &= \frac{1}{w^k} \frac{1}{(1-z/w)^k} \\ &= \frac{1}{w^k} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!} \left(\frac{z}{w}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+k-1}{k-1}}_{O(n^{k-1})} w^{-n-k} z^n \end{aligned}$$

Alors, si $|w|=1$, le coef. devant z^n est un $O(n^{k-1})$ car en n , $\binom{n+k-1}{k-1}$ est un

pol. de deg. $k-1$.

Donc, le coef devant z^n dans G est un $O(n^{p-2})$.

* Retour à S_n :

$$S_n = \underbrace{A \binom{n+p-1}{p-1}}_{O(n^{p-2})} + \underbrace{O(n^{p-2})} = \underbrace{A \frac{(n+p-1) \dots (n+1)}{(p-1)!}}_{O(n^{p-2})} + \underbrace{O(n^{p-2})}$$

De plus,

$$(1-z)^p F(z) = \prod_{i=1}^p \frac{1-z}{1-z\alpha_i} = \prod_{i=1}^p \frac{1}{1+\dots+z^{\alpha_i-1}}$$

Donc, en évaluant en 1:

$$A = \frac{p}{\prod_{i=1}^p \underbrace{1+\dots+1}_{\alpha_i}} = \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_p}$$

Finalement,

$$S_n \sim \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!} \square$$

Annexe:

• En calculant toute la décomposition en éléments simple des de F, on peut obtenir une formule exacte mais compliquée de S_n .

• Application:

Sait $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans un système monétaire $\{1, 2, 5, 10\}$, le nombre q_n de façon de faire n euros, a un comportement asymptotique $q_n \sim \frac{n^3}{600}$.

• Attention premier entre eux dans leurs ensemble $\neq$ premier deux à deux
Ex: 10, 15, 6 premier dans leurs ensemble mais pas premier 2 à 2.

$$\binom{n+p-1}{p-1} = \frac{(n+p-1)!}{(p-1)! (n+p-1-(p-1))!} = \frac{(n+p-1)!}{(p-1)! n!} = \frac{(n+p-1) \dots (n+1)}{(p-1)!} \sim \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

$$(1+z)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} z^n$$

- $(1+z)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} z^n$

- $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$

- **Rappel :**

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels. On supposera que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. Autrement dit, s'il existe un réel M et un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n| \leq M|v_n|$. On note

$$u_n = O(v_n).$$

- On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note

$$u_n = o(v_n).$$

- On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note

$$u_n \sim v_n.$$

- On a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$ si et seulement si $u_n - v_n = o(u_n)$.
- Si deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors elles ont le même signe à partir d'un certain rang.
- Si deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors l'une converge si et seulement si l'autre converge. Dans ce cas, leurs limites sont égales.

Règles de calcul pour les équivalents : Soient (u_n) , (v_n) , (x_n) et (y_n) quatre suites :

- si $u_n \sim v_n$ et $x_n \sim y_n$, alors $u_n x_n \sim v_n y_n$.
- si $u_n \sim v_n$ et $x_n \sim y_n$, alors $\frac{u_n}{x_n} \sim \frac{v_n}{y_n}$.
- si $u_n \sim v_n$ et $p \in \mathbb{Z}$, alors $u_n^p \sim v_n^p$.

Attention! En général, on ne peut pas ajouter des équivalents!

Règles de calcul pour la relation de négligeabilité : Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites :

- si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $\alpha u_n + \beta v_n = o(w_n)$.
- si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- si $u_n = o(w_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n v_n)$.

Thm:

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ nb premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons S_n le nb de sol. de l'éq.
 $n_1 \alpha_1 + \dots + n_p \alpha_p = n$ avec $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$.

Alors,

$$S_n \sim \frac{n^{p-1}}{\alpha_1 \dots \alpha_p (p-1)!}$$

Démo:

* Problème:

Regardons la série entière déf. par le produit de

Cauchy de:

$$\left(\sum_{n_1 \in \mathbb{N}} z^{\alpha_1 n_1} \right), \dots, \left(\sum_{n_p \in \mathbb{N}} z^{\alpha_p n_p} \right)$$

$$\text{Ainsi, on a : } F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n z^n = \left(\sum_{n_1 \in \mathbb{N}} z^{\alpha_1 n_1} \right) \dots \left(\sum_{n_p \in \mathbb{N}} z^{\alpha_p n_p} \right)$$

$$= \frac{1}{1-z^{\alpha_1}} \dots \frac{1}{1-z^{\alpha_p}} \quad (\text{Rayon de } \mathcal{C} = 1)$$

* Étude des pôles de F :

les pôles sont les racines α_j -ième de l'unité.

De plus,

↳ 1 pôle d'ordre p

↳ Soit w zéro-pôle de F . S.g par l'absurde $\alpha(w) = p$.

Alors, $w^{\alpha_1} = \dots = w^{\alpha_p} = 1$ et $w = \exp(2i\pi a/b)$ avec $\gcd(a,b) = 1$.

Donc, $b \mid \alpha_i \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$\Rightarrow b \mid \alpha_i \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$\Rightarrow b = 1$.

Donc $w = 1$.

Donc $\alpha(w) < p$.

* Réécriture de F :

$$F(z) = \frac{A}{(1-z)^p} + \underbrace{\sum_{w \text{ pôle}} \frac{a_{1,w}}{w-z} + \dots + \frac{a_{p-1,w}}{(w-z)^{p-1}}}_{=: G(z)}$$

* Étude de G :

Pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(w-z)^k} = \sum_{h=0}^{+\infty} \binom{n-k+1}{k-1} w^{-n-k} z^n$$

$\sim O(n^{k-1})$

Donc, le coeff. devant z^n dans G est un $O(n^{p-2})$

* Retour à S_n :

On a:

$$\begin{aligned} S_n &= A \binom{n-p+1}{p-1} + O(n^{p-2}) \\ &= A \frac{(n-p+1) \dots (n+1)}{(p-1)!} + O(n^{p-2}) \end{aligned}$$

De plus,

$$(1-z)^p F(z) = \prod_{i=1}^p \frac{1-z}{1-z^{\alpha_i}} = \prod_{i=1}^p \frac{1}{1+z+\dots+z^{\alpha_i-1}}$$

En évaluant en 1:

$$A = \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_p}$$

Finalement:

$$S_n \sim \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

□