

Ref: "131 dev par l'agreg"
D. Lesesvre p 487

Dev n° 30

Titre: Calcul des intégrales de Fresnel

Intégrales de Fresnel:

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Plan:

1) P.q $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi s^2} ds$ cv

2) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ périodique t.q. $x \in [0; 1] \mapsto e^{2i\pi x^2}$
P.q. $c_n(f) = \frac{1}{n} \int_{-n/2}^{n/2} e^{2i\pi s^2} ds$ et que la SF de f cv vers f .

3) Calcul de J .

4) Conclusion

Démo:

1) Posons $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi s^2} ds$ sont bien def.
On r.q. qu'en étudiant J on a par identification partie Im et Re a 2π près nos intégrales souhaitée.

* P.q I cv:

On a $g: u \mapsto \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}$ continue sur $]0; +\infty[$.

P.q g intégrable sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$.

• $u \in]0; 1]$, on a:

$$\left| \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{u}} \sim \text{int sur }]0; 1] \text{ par critère de Riemann}$$

Donc, par cr. de comparaison g int. sur $]0; 1]$.

• Soit $A \geq 1$. On a:

$$\int_1^A \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \stackrel{\text{I.P.P}}{=} \left[\frac{e^{iu}}{i\sqrt{u}} \right]_{u=1}^{u=A} + \frac{1}{2i} \int_1^A \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du$$

$\xrightarrow{A \rightarrow \infty} \frac{e^i}{i}$
 $1 \cdot 1 \leq u^{3/2} \text{ int sur } [1; +\infty[$

Donc, g int sur $[1; +\infty[$.

Donc I converge.

* P.q J cv:

Posons $u := 2\pi s^2$. (e^i diffio de $]0; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$) $du = 4\pi s ds$

Donc,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i2\pi s^2} ds \stackrel{\text{parité}}{=} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi s^2} ds = \sqrt{2\pi} J.$$

Donc, on a que J cv.

2) Posons $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 1-périodique et t.q. $x \in [0; 1] \mapsto e^{i2\pi x^2}$.

* SF de f cv:

f continue sur $\mathbb{R}$ et e^i par morosuse.

Par le thm de Dirichlet: la SF de f cv norm. vers f sur $\mathbb{R}$.

f continue sur $\mathbb{R}$ et e^i par morceaux.

Par le thm de Dirichlet : la SF de f cv norm. vers f sur $\mathbb{R}$.

* Trouvons les $c_n(f)$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, on a:

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \int_0^1 e^{2i\pi x^2} e^{-2i\pi nx} dx \\ &= \int_0^1 e^{2i\pi(x^2 - nx)} dx \\ &= \int_0^1 e^{2i\pi((x - n/2)^2 - n^2/4)} dx \\ &= e^{-i\pi n^2/2} \int_0^1 e^{2i\pi(x - n/2)^2} dx \\ &= e^{-i\pi n^2/2} \int_{-n/2}^{-n/2+1} e^{2i\pi s^2} ds \quad \left\{ \begin{array}{l} s = x - n/2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

3) * Calcul de J :

On a par $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_{2k}(f) = \int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi s^2} ds.$$

On a:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 1 \times \int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi s^2} ds = J.$$

Comme J cv, on a la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{2k}(f)$ qui cv.

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{2i\pi nx}.$$

En évaluant en $x=0$ et $x=1/2$, on a:

$$1 = f(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \quad \text{et} \quad i = f(1/2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) (-1)^n.$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k}(f) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) (1 + (-1)^n) \\ &= \frac{f(0) + f(1/2)}{2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi s^2} ds \\ &= \frac{1+i}{2} \end{aligned}$$

* Conclusion:

Par identification des parties réelles et imaginaires avec la partie des fonctions $t \mapsto \sin(t^2)$ et $t \mapsto \cos(t^2)$, on trouve:

$$\int_0^{+\infty} \sin(2\pi s^2) ds = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(2\pi s^2) ds = \frac{1}{4}$$

ch. dev. $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \square$

Annexe:

* Thm de Dirichlet:

Théorème : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, C^1 par morceaux, 2π -périodique. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Ici on a périodique sur $[0; 1]$ mais ça change rien.

• Critère de comparaison:

Théorème (critères d'intégrabilité par comparaison) : Soit $I = [a, b[$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux.

- si $0 \leq f \leq g$ alors l'intégrabilité de g sur I implique celle de f ;
- si $f(x) \sim_b g(x)$ et si g garde un signe constant au voisinage de b , l'intégrabilité de g sur I est équivalente à celle de f .

• Exercice colle:

Calculer $\int_0^{\pi/2} \log(\sin(t)) dt = \int_0^{\pi/2} \log(\cos(t)) dt = -\frac{\pi}{2} \log(2)$

* Bien définie:

- On a $t \mapsto \log(\sin(t))$ continue et bien def sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.
et $\log(\sin(\pi/2)) = \log(1) = 0$ bien def.

Pb en 0:

$$\begin{aligned} \log(\sin(t)) &= \log(x + o(x)) = \log(x(1 + o(1))) \\ &= \log(x) + \underbrace{\log(1 + o(1))}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \end{aligned}$$

Donc, $\log(\sin(t)) \sim \log(x)$

On a que $\log(x)$ est intégrable sur $[0, 1]$ car $|\log(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

on peut faire aussi par le fait que $\int_A^1 \log(x) dx = \underbrace{A \log(A) - A + 1}_{\xrightarrow{A \rightarrow 0} 0}$ int. sur $[0, 1]$ par cr. de Riemann

Comme $\log(\sin(t))$ reste négative sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ on peut appliquer le cr. de comparaison et donc I c.v.

- On a la même chose par J par symétrie de $\cos$ et $\sin$.

* Comment passer de I à J :

$t = \frac{\pi}{2} - x$ linéaire donc est facile.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \log(\sin(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \log(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \log(\cos(x)) dx = J \end{aligned}$$

* Calcul:

$$\begin{aligned} I + J &= 2I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin(x) \cos(x)) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{2 \sin(x) \cos(x)}{2}\right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \log(2 \sin(x) \cos(x)) - \log(2) dx \quad \downarrow 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x) \\ &= \int_0^{\pi/2} \log(\sin(2x)) - \log(2) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \log(\sin(2x)) dx - \frac{\pi}{2} \log(2) \quad \downarrow t = 2x \\ &= \int_0^{\pi} \log(\sin(t)) \frac{dt}{2} - \frac{\pi}{2} \log(2) \quad \downarrow \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi} \log(\sin(t)) \frac{dt}{2} = \frac{\pi}{2} \log(2)$$

$$= I - \frac{\pi}{2} \log(2)$$

$$\downarrow \int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

si $f(2a-x) = f(x)$

$$\Rightarrow I = \frac{-\pi}{2} \log(2) \text{ et de même } J = \frac{-\pi}{2} \log(2) \quad \square$$

Intégrales:

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Démo:

1) Posons $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi s^2} ds$

* P.g. I cv:

On a $g: u \mapsto e^{iu}/\sqrt{u}$ continue sur $]0; +\infty[$.

• pour $u \in]0; 1]$, on a:

$$|g(u)| \leq \frac{1}{\sqrt{u}} \leftarrow \text{int. sur } [0; 1] \text{ par cr. de Riemann}$$

Par critère de comparaison g int. sur $]0; 1]$.

• Pour $A \geq 1$, on a:

$$\int_1^A \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \stackrel{\text{I.P.P.}}{=} \underbrace{\left[\frac{e^{iu}}{i\sqrt{u}} \right]_{u=1}^{u=A}}_{\substack{A \rightarrow +\infty \rightarrow 0}} + \frac{1}{2i} \int_1^A \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du$$

$\underbrace{\int_1^A \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du}_{\substack{\text{int. sur } [1; +\infty[\\ \text{car } 1 \leq u^{3/2} \\ \text{int. sur } [1; +\infty[}}$

Donc, g int. sur $]0; +\infty[$.

Donc, I cv.

* P.g. J cv:

On a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i2\pi s^2} ds \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 2\pi s^2 \quad (e^1 \text{ difféo}) \\ \text{parité} \end{array} \right.$$

$$= \sqrt{2\pi} J$$

Donc, J cv.

2) Soit f 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ t.q. $x \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi x^2}$, f paire.

* SF de f cv vers f :

On a $f \in C^0(\mathbb{R})$ et e^1 par morceaux.

Donc, la SF de f cv. norm. vers f . (Dirichlet)

* Trouvons $C_n(f)$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a:

$$C_n(f) = \int_0^1 e^{2i\pi x^2} e^{-2i\pi nx} dx$$

$$= e^{-i\pi \frac{n^2}{2}} \int_0^1 e^{2i\pi (x - \frac{n}{2})^2} dx$$

$$= e^{-i\pi \frac{n^2}{2}} \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{1-n}{2}} e^{2i\pi s^2} ds$$

3) Calcul de J :

On a:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{2k}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1 \int_{-k}^{1-k} e^{2i\pi s^2} ds = J.$$

Donc la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{2k}(f)$ cv comme J cv.

De plus, on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k(f) e^{2i\pi nx}$$

En évaluant f on a:

$$1 = f(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k(f) \quad \text{et} \quad i = f(1/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k C_k(f)$$

On a donc:

$$J = \frac{f(0) + f(1/2)}{2} = \frac{1+i}{2}.$$

4) Conclusion:

Par identification de la partie imaginaire et réelle dans J et par parité de f on a:

$$\int_0^{+\infty} \sin(2\pi s^2) ds = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(2\pi s^2) ds = \frac{1}{4}.$$

Par changement de variable, on a le résultat souhaité $\square$