

Dev n° 27Titre: Application dont la différentielle est une isométrieOn note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ norme euclidienne.Thm:

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) \in \text{On}(\mathbb{R})$. i.e. $\|df(x) \cdot h\| = \|h\|, \forall h \in E$
 Alors, f est une isométrie affine.

La demo se fait en 4 parties:

Demo:Soit $a \in E$.* 1.1.9 $\exists$ voisinage ouvert U_a de a sur lequel f préserve les distances:c-a-d t.q. $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, $\forall (x, y) \in U_a^2$. Montrons par double $\leq$.• Par $(x, y) \in E^2$, l'inégalité des accroissements finis donne:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{z \in [x, y]} \|df(z)\| \|x - y\|$$

$\left. \begin{array}{l} df(z) \in \text{On}(E) \\ \|df(z)\| = 1 \end{array} \right\}$

$$\leq \|x - y\|$$

• Comme $df(a) \in \text{On}(E) \subset GL(E)$, le thm d'inversion locale donne l'existence de U_a t.q. $f: U_a \rightarrow f(U_a) = V_a$ soit un $\mathcal{C}^1$ -difféo dont on note $g: V_a \rightarrow U_a$ la réciproque.

On peut considérer $B \subset V_a$ avec B boule ouverte contenant a .On peut donc remplacer U_a par $g(B)$ et considérer V_a comme une boule ouverte.On a alors, pour $(x, y) \in U_a$:

$$\|x - y\| = \|g(f(x)) - g(f(y))\|$$

$\left. \begin{array}{l} \text{TAF} \\ dg(z) = (df(g(z)))^{-1} \in \text{On}(E) \end{array} \right\}$

$$\leq \sup_{z \in [f(x), f(y)]} \|dg(z)\| \|f(x) - f(y)\|$$

$$\leq \|f(x) - f(y)\|$$

Ainsi, $\forall (x, y) \in U_a^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.* 1.1.9 df constante sur U_a :

On a:

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \Leftrightarrow \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle = \langle x - y, x - y \rangle$$

En différentiant p.r à x et en évaluant en h , on a:

$$\langle df(x) \cdot h, f(x) - f(y) \rangle + \langle f(x) - f(y), df(x) \cdot h \rangle = \langle h, x - y \rangle + \langle x - y, h \rangle$$

$$\Rightarrow \langle df(x) \cdot h, f(x) - f(y) \rangle = \langle h, x - y \rangle$$

En différentiant p.r à y et en évaluant en h , on a $\forall (x, y) \in U_a^2, \forall h \in E$:

$$\langle df(x) \cdot h, df(y) \cdot h \rangle = \langle h, h \rangle$$

$$\Rightarrow \|df(x) \cdot h - df(y) \cdot h\|^2 = \|df(x) \cdot h\|^2 - 2 \langle df(x) \cdot h, df(y) \cdot h \rangle + \|df(y) \cdot h\|^2$$

$$= \|h\|^2 - 2 \langle h, h \rangle + \|h\|^2$$

$$\Rightarrow \|df(x) \cdot h - df(y) \cdot h\|^2 = \|df(x) \cdot h\|^2 - 2 \langle df(x) \cdot h, df(y) \cdot h \rangle + \|df(y) \cdot h\|^2 \\ = \|h\|^2 - 2 \langle h, h \rangle + \|h\|^2 \\ = 0.$$

↳ ça nous dit que df est constante sur U_a .

* 1.9 df constante sur tout E :

Prenons $X := \{x \in E \mid df(x) = df(0)\}$

X fermé dans E car f de classe C^1 sur E . (Car $X = df^{-1}(\underbrace{\{df(0)\}}_{\text{fermé}})$ donc fermé)
Or d'après le fait que df est constante sur U_0 , on a que X est aussi ouvert.
et $X \neq \emptyset$ car $0 \in X$.

Donc, $X = E$ (par connexité, E connexe car convexe / connexe par arc)

* Conclusion:

Notons $u := df(0) \in O(E)$.

La fonction $f - u$ est C^1 de différentielle nulle sur E .

Donc $f - u$ est constante: $b \in E$

Donc, $f = u(\cdot) + b$ est une isométrie affine. $\square$

Annexe:

* déf isométrie affine :

$u \in O(E)$ et $a \in E$ et $f: E \rightarrow E; x \mapsto u(x) + a$.

Alors f est une isométrie affine.

* Prop:

f isométrie affine $\Rightarrow df(x) = u \in O(E)$ avec $f(x) = u(x) + a$.

* Différentielle de $\mathbb{I}: x \mapsto \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle$

Démon:

$$\begin{aligned} \bullet \mathbb{I}(x+h) - \mathbb{I}(x) &= \|x+h-y\|^2 - \|x-y\|^2 \\ &= 2 \langle x-y, h \rangle + \|h\|^2 = d\mathbb{I}_x(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Et } \tilde{\mathbb{I}}(f(x)) \text{ diff? avec } \tilde{\mathbb{I}}: x \mapsto \|x - f(y)\|^2 \\ d\tilde{\mathbb{I}} \circ f_x(h) = 2 \langle df_x(h), f(x) - f(y) \rangle \end{aligned}$$

* Une fonction admettant des dérivées directionnelles en 0 est-elle continue en 0?

NON contre-exemple: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

* Thm d'inversion locale:

Théorème : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de U et f une fonction de U dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 . On suppose que la différentielle de f en a est inversible. Alors il existe un ouvert V contenant a et un ouvert W contenant $f(a)$ tels que f soit un C^1 -difféomorphisme de V sur W . En outre, pour tout x de V , on a :

$$d(f^{-1})_{f(x)} = (df_x)^{-1}.$$

De plus, si f est C^k , $k \geq 1$, alors f^{-1} est C^k .

Théorème : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de U et f une fonction de U dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 . On suppose que la différentielle de f en a est inversible. Alors il existe un ouvert V contenant a et un ouvert W contenant $f(a)$ tels que f soit un C^1 -difféomorphisme de V sur W . En outre, pour tout x de V , on a :

$$d(f^{-1})_{f(x)} = (df_x)^{-1}.$$

De plus, si f est C^k , $k \geq 1$, alors f^{-1} est C^k .

* Thm d'inversion globale:

Théorème : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de U dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et injective. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- pour tout x de U la différentielle de f en x est inversible;
- $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un C^1 -difféomorphisme de U sur $f(U)$.

De plus, on peut remplacer C^1 par C^k pour $k \geq 1$.

* M.9 X est fermé:

$$X = \{x \in E \mid df(x) = df(a)\}.$$

On a $df: x \mapsto df(x)$ continue car $f \in \mathcal{C}^1$. $df \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow df^{-1}$ continue.

$$X = df^{-1}(\{df(a)\})$$

continue $\rightarrow$ singuliers donc fermé

image réciproque d'un fermé par une application continue $\Rightarrow$ fermé

* TAF multi dimension:

THÉORÈME 3 (INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS). Soit $f: U \subset E \rightarrow F$, où E et F sont deux e.v.n et U un ouvert de E . Soit $(a, b) \in U^2$ tel que le segment $[a, b] = \{ta + (1-t)b, t \in [0, 1]\}$ soit inclus dans U . Si f est continue sur $[a, b]$, différentiable en tout point de $]a, b[$ et s'il existe $M > 0$ tel que $\|df_c\| \leq M$ pour tout $c \in]a, b[$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$.

Démonstration. La fonction $g: [0, 1] \rightarrow F \quad t \mapsto f(a + t(b-a))$ est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$, et

$$\forall t \in]0, 1[, \quad g'(t) = df_{a+t(b-a)}(b-a)$$

(voir la remarque 8). On a donc $\|g'(t)\| \leq M\|b-a\|$ sur $]0, 1[$, donc d'après le théorème 5 page 75,

$$\|f(b) - f(a)\| = \|g(1) - g(0)\| \leq M\|b - a\|.$$

□

Conséquence :

- Si U est convexe, si f est différentiable sur U et si $\|df_x\| \leq M$ pour tout $x \in U$, alors

$$\forall (a, b) \in U^2, \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|.$$

- Si U est un ouvert connexe et $df_x = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U (en effet, U est connexe par lignes brisées — voir le théorème 5 page 42 — et $f(a) = f(b)$ pour tout segment $[a, b] \subset U$).

Notation: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^n$
 $\|\cdot\|$ norme euclidienne

Thm:

Soit $f: E \rightarrow E$ e^1 t.q. $\forall x \in E, df_x \in O_n(\mathbb{R})$ i.e. $\|df_x(h)\| = \|h\|$
 $\forall h \in E$.

Alors, f est une isométrie affine.

Démo:

Soit $a \in E$. U_a voisinage de a dans E .

* 1. q f préserve les distance sur U_a :

- Soient $x, y \in E$, par le T.A.F. on a:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{z \in [x, y]} \|df_z\| \|x - y\|$$

$$= 1 \text{ car dans } O(E)$$

$$\leq \|x - y\|$$

- Comme $df_a \in O(E) \subset GL(E)$, le thm. d'inversion locale donne que f est un e^1 -difféo de U_a à dans $V_a := f(U_a) \subset E$ et comme réciproque
 $g: V_a \rightarrow U_a$.

Quitte à prendre des ouverts plus petits, on s.g. V_a est convexe.

- On a pour $x, y \in V_a$:

$$\|x - y\| = \|g(f(x)) - g(f(y))\| \stackrel{\text{T.A.F.}}{\leq} 1 \cdot \|x - y\|$$

- CCL: $\forall x, y \in U_a$: $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

* 1. q df constante sur U_a :

On a pour $x, y \in U_a$:

$$\langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle = \langle x - y, x - y \rangle$$

En diff. p/r à x et en évaluant en h , on a:

$$\langle df_x(h), f(x) - f(y) \rangle = \langle h, x - y \rangle$$

$\Rightarrow$

$$\langle df_x(h), df_y(p) \rangle = \langle h, p \rangle.$$

Donc, par $x, y \in U_a$ et $h \in E$:

$$\begin{aligned} \|df_x(h) - df_y(h)\|^2 &= \|df_x(h)\|^2 - 2 \langle df_x(h), df_y(h) \rangle + \|df_y(h)\|^2 \\ &= \|h\|^2 - 2 \langle h, h \rangle + \|h\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

* 1. q df constante sur E :

Posons $X = \{x \in E \mid df_0 = df_x\}$

On a:

- X fermé car $f \in e^1(E)$
- $X \neq \emptyset$ car $0 \in X$
- X ouvert par pt précédent

$\hookrightarrow E$ connexe car connexe par arc

Donc, $E = X$.

* Conclusion:

Notons $u = df_0 \in O(E)$.

On a, $f-u$ de diff. nulle.

Donc, $f-u = b \in E$.

Donc, f de la forme $f(\cdot) = u(\cdot) + b$
 isométrie affine $\square$