

Dev n° 26

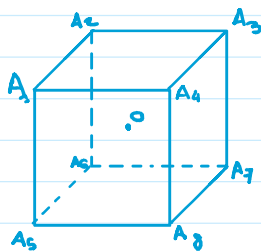
Ref: Rombaldi "Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie"
p 88 Thm 3.15.

Titre: Isométrie du Cube

Notons dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ le cube de sommets $A_1, \dots, A_8$ avec $A_i = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Comme ceci:

$$S = \{A_1, \dots, A_8\}$$



$$A_5 = -A_3$$

$$A_6 = -A_4$$

$$A_7 = -A_1$$

$$A_8 = -A_2$$

Thm:

Le groupe $I_S(S)$ agit de façon transitive sur S .

On a: $|I_S(S)| = 48$ et $|I_S^+(S)| = 24$.

De plus,

$$I_S^+(S) \cong S_4 \quad \text{et} \quad I_S(S) \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Démon.

① Transitivité:

On prend les rotations r de centre O et d'axe passant par le milieu de deux faces parallèles. (de mesure d'angles $\pi/4, \pi/2$ et $3\pi/4$)

En composant ces rotations on obtient $O(S) = S$.

Donc $I_S(S)$ agit de façon transitive.

② Cardinalité:

On a :

$$|I_S(S)| = |Orb(A_1)| \cdot |Stab(A_1)|$$

$$\text{et } |I_S^+(S)| = |Orb^+(A_1)| \cdot |Stab^+(A_1)|$$

* Déterminons $|Stab(A_1)|$:

Une isométrie préserve les distances.

Donc, les sommets voisins de A_1 sont envoyés sur un sommet voisin.

A_1 est fixé et chaque sommet voisin est envoyé sur un sommet mais à la même distance. Donc, son image reste un sommet voisin de A_1 .

Sommet voisins de A_1 : $\{A_2, A_4, A_5\}$.

Il y a 6 possibilités $\leadsto |Stab(A_1)| = 3! = 6$

id, rot d'axe $A_1 A_7$ d'angle $2\pi/3, 4\pi/3$

réflexion du plan passant invariant A_2 ou A_5
 $\leadsto A_4$

En regardant que les isométries directs on a : $|Stab^+(A_1)| = 3$.

* Déterminons $|Orb(A_1)|$:

En regardant que les isométries directs on a : $|\text{Stab}^+(A_1)| = 3$.

* Déterminons $|\text{Orb}(A_1)|$:

action transitive $\Rightarrow |\text{Orb}(A_1)| = 8$.

* CCL: par la Formule des classes:

$$|\text{Is}(S)| = 8 \times 6 = 48 \quad \text{et} \quad |\text{Is}^+(S)| = 8 \times 3 = 24.$$

③ Isomorphisme:

* Notons $D = \{[A_1, A_7], [A_2, A_8], [A_3, A_5], [A_4, A_6]\}$.

Par conservation des normes par une isométrie, une grande diagonale est envoyée sur une grande diagonale.

Donc, D invariant par tout élément de $\text{Is}(S)$.

L'application Φ qui associe à $\pm \in \text{Is}(S)$ la permutation correspondant des grandes diagonales réalise un morphisme de groupes de $\text{Is}(S)$ dans $S(D)$.

et $S(D) \cong S_4$: $\Phi: \text{Is}(S) \longrightarrow S(D) \cong S_4$ morphisme de groupe

* Noyau:

Si $\pm \in \text{Ker}(\Phi)$:

$\pm$ conserve chaque grande diagonale : $\pm(A_1) = A_1$ ou A_7

$\hookrightarrow$ si $\pm(A_1) = A_7$, alors $\pm([A_1, A_2]) = [A_1, A_k]$ avec $k = 2, 4$ ou 5 .
(par conservation des arêtes)

Et $\pm(A_2) = A_2$ ou A_8 (la diagonale $[A_2, A_8]$ est conservé)

Donc, $\pm(A_2) = A_2$.

De même $\pm(A_4) = A_4$ et $\pm(A_5) = A_5$

Donc $\pm = \text{id}$ car la base (A_1, A_2, A_4) est conservé

$\hookrightarrow$ si $\pm(A_1) = A_7$, alors $\pm([A_1, A_2]) = [A_7, A_k]$ avec $k = 3, 6$ ou 8
(par conservation des arêtes)

Et $\pm(A_2) = A_8$ ou A_2 . (grande diagonale)

Donc, $\pm(A_2) = A_8$.

De même, $\pm(A_4) = A_6$ et $\pm(A_5) = A_3$

Donc $\pm = -\text{id} = \text{symétrie}$

Donc,

$$\text{Ker}(\Phi) = \{ \text{id}, -\text{id} \} \quad \text{et} \quad \text{Ker}(\Phi|_{\text{Is}^+(S)}) = \{ \text{id} \}$$

* Conclusion:

On a $\Phi|_{\text{Is}^+(S)}: \text{Is}^+(S) \longrightarrow S_4$ est injectif.

De plus,

$$|\text{Is}^+(S)| = 24 = |S_4| \quad \text{même cardinalité.}$$

On a donc un isomorphisme par cardinalité.

Donc, $\text{Is}^+(S) \cong S_4$.

De plus, en désignant θ isomorphisme de S_4 à $\text{Is}^+(S)$ on a:

$$\Psi: \{ -1, 1 \} \times S_4 \longrightarrow \text{Is}(S) \\ (\varepsilon, \sigma) \longmapsto \varepsilon \theta(\sigma)$$

morphisme de groupe surjectif car:

$\forall (\varepsilon, \sigma), (\varepsilon', \sigma') \in \{ -1, 1 \} \times S_4$, on a:

$$\begin{aligned} \Psi((\varepsilon, \sigma)(\varepsilon', \sigma')) &\stackrel{\times}{=} (\varepsilon\varepsilon', \sigma\sigma') \\ &\stackrel{\text{d.f.}}{=} \varepsilon\varepsilon' \theta(\sigma\sigma') \\ &\stackrel{\text{comm.}}{=} \varepsilon\theta(\sigma) \varepsilon'\theta(\sigma') \\ &\stackrel{\text{d.f.}}{=} \Psi(\varepsilon, \sigma) \Psi(\varepsilon', \sigma'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{con.}}{=} & \varepsilon \theta(\sigma) \varepsilon' \theta(\sigma') \\ \stackrel{\text{diff.}}{=} & \Psi(\varepsilon, \sigma) \Psi(\varepsilon', \sigma'). \end{aligned}$$

$$\text{et } \forall \pm \in I_5^+(S), \text{ on a } \pm = \Psi((\pm, \theta^{-1}(\pm))) \in I_5^+(S)$$

$$\forall \pm \in I_5^-(S) \quad -\pm = \Psi((-1, \theta^{-1}(\pm))) \in I_5^+(S).$$

Et par cardinalité, on a Ψ bijectif.

Donc, $I_5(S) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_4$ $\square$

Annexe:

* Transitive:

def: on dit que l'action de G sur E est transitive si

$$\forall (x, y) \in E^2, \exists g \in G \text{ t.q. } y = g \cdot x.$$

$\hookrightarrow$ Il y a qu'une seule orbite par l'action

* Formule des classes:

$$|G| = |\text{Orb}(x)| |\text{Stab}(x)|$$

* On a $|S_n| = n!$ et $|A_n| = \frac{n!}{2}$

* Classification des éléments de $I_5(S)$:

pour I_5^+ avec les ordres.

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

ordre 1: id

ordre 2: 3 rotations d'axe O_x, O_y et O_z (rot. passant milieu faces)
de mesure d'angle π

6 rotations d'axes par les milieux des arêtes de mesure
d'angle π

ordre 3: 8 rotations d'axes les 4 grandes diagonales et d'angles
de mesure $\pm \frac{2\pi}{3}$

ordre 4: 6 rotations d'axe O_x, O_y, O_z de mesure d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$.

Ce qui donne:

$$1 + 9 + 8 + 6 = 24.$$

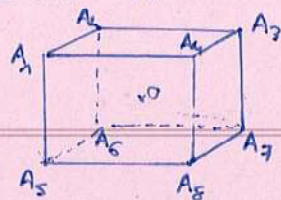
Par $I_5(S)$ on compose chacune avec -id pour avoir les 48 éléments.

* Rotation dans $\mathbb{R}^3$:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ et } R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ces matrices sont dans $O_3(\mathbb{R}) = \{ \Pi \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t \Pi \Pi = \text{Id} \}$

Dans $\mathbb{R}^3$



$$A_1 = (\pm 1; \pm 1; \pm 1)$$

$$S = (A_1, \dots, A_8)$$

Démo:

1) Transitivité:

Prenons A_1 CS. En appliquant les rotations préservant les plans xOy , xOz et yOz , A_1 est envoyé sur tous sommets de S .

Donc, $Is(S)$ agit transitivement.

2) Cardinalité:

* $|Orb(A_1)| = 8$ (transitivité)

* Stabilisateur?

Les iso. préservent les distances $\Rightarrow$ voisins de A_1 envoyés sur un voisin de A_1 .

Voisins: $\{A_2, A_4, A_5\}$

Donc, $|Stab(A_1)| = 3! = 6$ et $|Stab^+(A_1)| = 3$.

* CCL: par la formule des classes

$$|Is(S)| = 6 \times 8 = 48 \quad \text{et} \quad |Is^+(S)| = 3 \times 8 = 24$$

3) Isomorphismes:

* Notons $D = \{[A_1; A_7], [A_2; A_8], [A_3; A_4], [A_5; A_6]\}$ ensemble des grandes diagonales.

Par conservation des distances: D invariant par les éléments de $Is(S)$. Prenons le morphisme:

$$\mathbb{I} : Is(S) \longrightarrow S(D) \cong S_4$$

[26] * Noyau de $\mathbb{I}$:

Soit $\mathbb{I} \in \text{Ker } \mathbb{I}$.

On a $\mathbb{I}([A_1; A_7]) = [A_1; A_7]$.

$\hookrightarrow$ Si $\mathbb{I}(A_1) = A_1$: on a $\mathbb{I}([A_1; A_2]) = [A_1; A_k]$ où $k \in \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

De plus, $\mathbb{I}([A_2; A_8]) = [A_2; A_8]$.

Donc, $\mathbb{I}(A_2) = A_2$.

De même, $\mathbb{I}(A_4) = A_4$ et $\mathbb{I}(A_5) = A_5$

Donc, $\mathbb{I} = \text{id}$.

$\hookrightarrow$ Si $\mathbb{I}(A_1) = A_7$: on a $\mathbb{I}([A_1; A_2]) = [A_7; A_k]$ où $k \in \{3, 6, 8\}$

De plus, $\mathbb{I}([A_2; A_8]) = [A_2; A_8]$.

Donc, $\mathbb{I}(A_2) = A_8$.

De même, $\mathbb{I}(A_4) = A_6$ et $\mathbb{I}(A_5) = A_3$.

Donc, $\mathbb{I} = -\text{id}$.

Donc, $\text{Ker } (\mathbb{I}) = \{\text{id}, -\text{id}\}$ et $\text{Ker } (\mathbb{I}|_{Is^+(S)}) = \{\text{id}\}$

* CCL:

• On a $\mathbb{I}|_{Is^+}$ injectif et cardinalité $\Rightarrow$ iso.

Donc: $Is^+(S) \cong S_4$

• On a:

$$\Psi : \{-1, 1\} \times S_4 \longrightarrow Is(S)$$

$$(\varepsilon, \sigma) \longmapsto \varepsilon \theta(\sigma)$$

morphisme surjectif et cardinalité $\Rightarrow$ iso.

Donc: $Is(S) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_4$ $\square$