

Dev n° 23Titre: Décomposition polaire

Thm:

L'application $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto OS \in GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Thm: (décompo)

 $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$
 $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Par cela montrons le lemme:

Lemme:

Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.Alors, $\exists! B \in S_n^+(\mathbb{R})$ t.q. $A = B^2$.

Dém: (lemme)

① Existence:

Par le thm spectral $\exists O \in O_n$ t.q. $A = {}^t O D O$ où $D = \text{diag}(\lambda_i)$ $\lambda_i \geq 0$ On pose $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})$ et $\Delta^2 = D$.On a donc $A = {}^t O D O$

$$= {}^t O \Delta^2 O$$

$$= {}^t O \Delta O {}^t O \Delta O$$

$$= S^2 \text{ où } S = {}^t O \Delta O \in S_n^+$$

② ${}^t S$ est un polynôme en A . $\exists P \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i} \quad \forall i$

$$A^k = ({}^t O D O)^k = {}^t O D^k O \quad \forall k.$$

$$\begin{aligned} P(A) &= {}^t O P(D) O = {}^t O \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} O \\ &= {}^t O \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} O = {}^t O \Delta O = S. \end{aligned}$$

③ Unicité:

S.t.q. $A = S^2 = S'^2$ où $S' \in S_n^+$ m.q. $S = S'$. S commute avec A . A pol. en S' donc A commute avec S' .Donc, S commute avec S' . } donc co-diag.

Elles sont diag.

$$\begin{aligned} \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \left. \begin{aligned} S &= P^{-1} D_1 P \\ S' &= P^{-1} D_2 P \end{aligned} \right\} \Rightarrow S^2 = P^{-1} D_1^2 P = A = S'^2 = P^{-1} D_2^2 P \end{aligned}$$

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \begin{cases} S = P^{-1} D_1 P \\ S' = P^{-1} D_2 P \end{cases} \Rightarrow S^2 = P^{-1} D_1^2 P = A = S'^2 = P^{-1} D_2^2 P$$

$$\hookrightarrow D_1^2 = D_2^2 \stackrel{\text{diag} > 0}{\Rightarrow} D_1 = D_2 \Rightarrow S = S' \square$$

Démo: (thm - décompo)

* Unicité:

Si existence c-a-d si $A = \Omega S$, alors ${}^t A A = S^t \Omega \Omega S = S^2$.

S est la racine carrée positive de la matrice sym. déf. positive ${}^t A A$

$$\langle {}^t A A x | x \rangle = \|A x\|^2 > 0 \text{ pour } x \neq 0$$

La matrice Ω est alors donnée par $\Omega = A S^{-1}$.

Si existence, on a donc unicité par construction.

* Existence:

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t A A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Par le lemme $\exists! S \in S_n^+(\mathbb{R})$ t.q. $A = S^2$.

Posez $\Omega = A S^{-1} \rightsquigarrow A = \Omega S$.

Vérifions $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$:

$${}^t \Omega \Omega = {}^t (A S^{-1}) (A S^{-1}) = {}^t S^{-1} {}^t A A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = \text{Id}.$$

Donc $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$. $\square$

On en déduit :

Démo:

- bi: unicité de la décompo
- continue: par la multiplication matricielle
- inverse continue:

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset GL_n(\mathbb{R})$ qui cv vers A .

Notons $\mathcal{I}^{-1}(A_k) := O_k S_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{I}^{-1}(A) = O S$.

De la suite (O_k) on extrait $(O_{j(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui cv vers $O' \in O_n(\mathbb{R})$.

De $S_k = {}^t O_k A_k$ on en déduit que $(S_{j(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ cv vers $S' = {}^t O' A$.

S' sym. positif car déf comme limite d'une suite de matrice sym. pos. et définie car inversible. On a donc l'unique décompo polaire $A = O' S' \Rightarrow O = O'$

Donc $(O_k)_k$ a une unique valeur d'adhérence dans $O_n(\mathbb{R})$ (compact).

Donc $O_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} O$ et $S_k = {}^t O_k A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} {}^t O A = S$

C-a-d $\mathcal{I}^{-1}(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}^{-1}(A)$, donc $\mathcal{I}^{-1}$ continue $\square$

Annexe:

* Lemme:

$O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$.

Démo:

• $\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \|A\| = 1$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ borné dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$

• $O_n(\mathbb{R}) = \mathcal{I}^{-1}(\text{Id})$ et $\mathcal{I}: A \mapsto {}^t A A$ donc O_n fermé.

CCL $O_n(\mathbb{R})$ compact dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ car borné fermé et dim $< \infty$.

* Généralisation:

De la densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ on en déduit une décompo dans $M_n(\mathbb{R})$.

Preuve. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$ où $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles. Avec le théorème de décomposition polaire, on peut écrire pour tout entier k , $A_k = \Omega_k S_k$ où $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices orthogonales et $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices symétriques définies positives. De la suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on peut extraire une sous-suite $(\Omega_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. De $S_k = \Omega_k^{-1} A_k = {}^t \Omega_k A_k$ et de la continuité du produit matriciel, on déduit que la suite $(S_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente. La limite S de cette suite est une matrice symétrique positive et $A = \Omega S$. $\square$

densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\Gamma_n(\mathbb{R})$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour un entier naturel non nul p , on introduit la matrice

$$M_p = M - \frac{1}{p} I_n.$$

Il est évident que la suite (M_p) converge vers M . De plus, M_p est inversible à partir d'un certain rang. En effet, $\det(M_p)$ ne peut pas prendre plus de n fois la valeur zéro. Donc, il existe une suite de matrices inversibles qui tend vers M . Ainsi $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

* Il y a le résultat dans les complexes:

$A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists ! U_n(\mathbb{C})$ (c-à-d $U^t \bar{U} = I_n$) et $H \in H_n(\mathbb{C})$ (c-à-d $\bar{H}^t = H$)
t.q. $A = UH$.

* En fait l'homéomorphisme est un C^∞ -homéomorphisme

Ide de preuve en utilisant thm d'inversion globale

Décomposition polar

Thm:

$$\Psi: (o, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}) \mapsto OS \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ homéomorphisme}$$

Thm: (décompo)

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ peut s'écrire de manière unique } A = OS$$

$$\text{où } O \in O_n(\mathbb{R}), S \in S_n^+(\mathbb{R})$$

Lemme:

$$S: A \in S_n^+(\mathbb{R}), \text{ alors, } \exists! B \in S_n^+(\mathbb{R}) \text{ t.q. } A = B^2$$

Démon: (Lemme)

* Existence:

Par le thm Spectral $\exists O \in O_n$ t.q. $A = {}^t O D O$ où

$$D = \text{diag}(\lambda_i), \lambda_i \geq 0$$

$$\lambda_i \text{ vp de } A.$$

Posons $A := \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})$ et $A^2 = D$.

On a: $A = {}^t O D O = {}^t O A^2 O = \underbrace{{}^t O A O}_{=: S \in S_n^+} A = S^2.$

* Π .q. S est un pol. en A :

$$\exists P \in \mathbb{R}[X] \text{ t.q. } P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}, \forall i.$$

$$\text{On a } A^k = ({}^t O D O)^k = {}^t O D^k O, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc, $P(A) = {}^t O P(D) O = {}^t O \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} O = {}^t O A O = S.$

* Unicité:

$$\text{S.g. } A = S_1^2 = S_2^2 \text{ où } S_1, S_2 \in S_n^+. \Pi.q. S_1 = S_2.$$

S_1 commute avec A . S_2 commute avec A car pol.

Donc, $\left. \begin{array}{l} S_1 \text{ et } S_2 \text{ comm.} \\ \text{+ diag} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{co. diag.}$

$$\left. \begin{array}{l} \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } S_1 = P^{-1} D_1 P \\ S_2 = P^{-1} D_2 P \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S_1^2 = P^{-1} D_1^2 P = A \\ S_2^2 = P^{-1} D_2^2 P = A \end{array} \right\} \Rightarrow S_1^2 = S_2^2 = A$$

Démon: (thm-décompo)

* Unicité:

Si existence, $A = OS$, alors ${}^t A A = {}^t (OS) OS$

$$= S^t O O S$$

$$= S^2$$

S unique par le Lemme

Alors $O = AS^{-1}$

Si existence, on a donc unicité.

* Existence:

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t A A \in S_n^+(\mathbb{R})$

Par le Lemme, $\exists! S \in S_n^+(\mathbb{R})$ t.q. ${}^t A A = S^2.$

Posons $O = AS^{-1} \leadsto A = OS.$

On a:

$${}^t O O = {}^t (AS^{-1}) AS^{-1} = S^{-1} {}^t A A S^{-1} = \text{Id}.$$

Donc, $O \in O_n(\mathbb{R}). \square$

Démon:

- bij: thm
- cont: x matricielle
- inv. continue:

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset GL_n(\mathbb{R})$ qui cv vers A .

Notons $\Psi^{-1}(A_k) := (O_k, S_k) \forall k \in \mathbb{N}$ et $\Psi^{-1}(A) = (O, S).$

Par compacité, on extrait $(O_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$ qui cv vers $O' \in O_n(\mathbb{R})$. On a $S_{k'} = {}^t O_{k'} A_{k'}$ cv vers $S' := {}^t O' A$.

Par unicité de la décompo: $A = O' S' \Rightarrow O' = O$.

Donc, $\Psi^{-1}(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Psi^{-1}(A). \square$