

Dev n° 21

Ref: P. Caldero, M. Peronnier
 "Carnet de voyage en Algèbre"
 p 27 à 32
 + Romaldi p 650

Titre: Critère de nilpotence par la trace

Prop:

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ t.q. $A + \mu B$ soit nilpotente pour au moins $(n+1)$ valeur de $\mu \in \mathbb{C}$.

Alors, A et B sont nilpotentes et toute matrice de $\text{Vect}(A, B)$ est nilpotente.

Pour cela montrons avant que:

Thm:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$

Alors, A est nilpotente ssi $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Tr}(A^k) = 0$.

Demo: (Thm)

$\Rightarrow$ A nilpotente.

$\hookrightarrow$ existe car on est dans $\mathbb{C}$

Donc, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice de passage par passer de A à sa matrice triangulaire sup. qu'on note J . $A = PJP^{-1}$.

On sait que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(PJP^{-1}) = \text{Tr}(J) = 0$ * car $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

Donc $\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(J^k) = 0$.

$\Leftarrow$ Supposons que $A \in M_n(\mathbb{C})$ t.q. $\text{Tr}(A^k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$.
 Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$. *

Raisonnons par l'absurde: s.g. A non nilpotente.

Donc, A admet des valeurs propres non-nulles distinctes: $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ avec $r \geq 1$,
 et $n_1, \dots, n_r$ leur multiplicité respectives.

On a, $\forall k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^k) &= \text{Tr}(P T^k P^{-1}) \\ &= \text{Tr}(T^k) \\ &= n_1 \lambda_1^k + \dots + n_r \lambda_r^k = 0. \end{aligned}$$

En écrivant ces relations pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on obtient que $(n_1, \dots, n_r)$ est sol. du système:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{bmatrix}}_{D(\lambda_1, \dots, \lambda_r)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}}_{\substack{\in \mathbb{C}^r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

On cherche à calculer le déterminant de $D(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

$$|D(\lambda_1, \dots, \lambda_r)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 |D(\lambda_1, \dots, \lambda_r)| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} \lambda_1 \dots \lambda_r \\
 &= \overset{\substack{\uparrow \\ \text{vandermonde}}}{V(\lambda_1, \dots, \lambda_r)} \lambda_1 \dots \lambda_r \\
 &= \underbrace{\left[\prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \right]}_{\neq 0 \text{ car les } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j} \times \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{\neq 0 \text{ par h. sur les } \lambda_i} \neq 0
 \end{aligned}$$

Donc, on a ici un système de Cramer et donc $\exists!$ sol au système qui est $n_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} = 0, \forall i \in [1, r]$.

Donc $(n_1, \dots, n_r) = 0$. $\sum$

On a ici une contradiction comme on supposait que les $n_i \geq 1$.

Donc, A est nilpotente $\square$

Passons à la démonstration de la prop.

Démo. (Prop)

• M.q. A et B nilpotents:

Soit $k \in [1, n]$.

Soit $P_k: \mu \mapsto \text{tr}((A + \mu B)^k)$.

Or $(A + \mu B)^k = A^k + \mu^k B^k + \sum_{j=1}^{k-1} \mu^j C_j$ avec C_j un polynôme de A et de B.

En passant à la trace on a:

$$P_k(\mu) = \text{Tr}(A^k) + \mu^k \text{Tr}(B^k) + \sum_{j=1}^{k-1} \mu^j \text{Tr}(C_j) \quad \text{car la trace est linéaire}$$

P_k est une fonction polynomiale en $\mathbb{C}$.

Ce polynôme est de degré $k \leq n$.

P_k s'annule n-1 fois et est de degré $k \leq n$: donc $P_k = 0$.

On a donc:

$$0 = \text{Tr}(A^k) \text{ et } \text{Tr}(B^k) = 0 \quad (\text{par identification})$$

Ceci étant vrai $\forall k$, par le thm on a A et B nilpotents.

• M.q. $M \in \text{Vect}(A, B)$ nilpotent:

Soit $M \in \text{Vect}(A, B)$, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ t.q $M = \lambda A + \mu B$

$\hookrightarrow$ Si $\lambda = 0$, on a directement M nilpotent

$\hookrightarrow$ Si $\lambda \neq 0$, on a:

$$\text{Tr}((\lambda(A + \frac{\mu}{\lambda}B))^k) = \lambda^k P_k(\mu/\lambda) = 0.$$

Par le thm on a $\lambda A + \mu B$ nilpotent $\square$

Annexe:

$\rightarrow$ Que se passe-t-il dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$?

Pb pour le lemme: pb pour résoudre $(n_1, \dots, n_r) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^r$.
car la caractéristique est p.

$\rightsquigarrow$ vraie qu'en caractéristique nul.

car la caractéristique est p .
 $\leadsto$ vraie qu'en caractéristique nul.

→ Déterminant de Vandermonde: $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$

Démo:

Par récurrence:

(I) $n=2$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$ Ok.

(H) Soit $n \geq 3$.

Supposons le résultat vraie au rang $n-1$.
 Montrons au rang n .

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Le déterminant est une forme n -linéaire alternée, on a que par tout polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}^{n-1}[X]$

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2} \\ P(\lambda_1^{n-1}) & \dots & P(\lambda_n^{n-1}) \end{vmatrix}$$

En particulier, pour $P(X) = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \lambda_k)$, on a:

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \lambda_n^{n-2} \\ 0 & 0 & P(\lambda_{n-1}) & P(\lambda_n) \end{vmatrix} = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) P(\lambda_n)$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_k) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (\lambda_j - \lambda_i)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

OU $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-1}(\lambda_2 - \lambda_1) & \dots & \lambda_n^{n-1}(\lambda_n - \lambda_1) \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^n (\lambda_k - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$

$L_j \leftarrow L_j - \lambda_1 L_1$
 $j \in [2, n]$

(CCL) On a le résultat souhaité.

→ Formule de Cramer:

Les déterminants permettent de résoudre les systèmes linéaires. On suppose donné le système de n équations à n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution si, et seulement si, le déterminant D du système est non nul, où D est donné par :

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ & & & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On dit alors que le système est un **système de Cramer**. On peut déterminer la valeur des inconnues x_i d'un système de Cramer par les formules suivantes, appelées **formules de Cramer** :

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|D|}$$

Démonstration :

$$DX = A \Leftrightarrow A = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$$

Par linéarité du déterminant suivant la k -ième colonne on en déduit :

$$\det \left(\underbrace{[C_1 \dots C_{k-1} \mid A \mid C_{k+1} \dots C_n]}_{D_k} \right) = \sum_{i=1}^n x_i \det \left([C_1 \dots \mid C_i \mid C_{k+1} \dots C_n] \right) \\ = x_k \det(D) \quad \text{Idem} \Rightarrow x_k = \frac{\det(D_k)}{\det(D)} \quad \square$$

$\rightarrow \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

Démonstration :

La trace d'une matrice carrée $C = (c_{ij})$ de dimension n (élément de $\mathbf{N}^n$) est $\text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{i,i}$

Si l'on note $C = AB$ et $D = BA$, où A et B sont deux matrices carrées de dimension n à coefficients réels, on a, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[1, n]$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$, ce qui donne dans le cas où $i = j$, $c_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i}$.

Par conséquent,

$$\text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i}$$

J'espère que tu avais trouvé cette expression. Une fois arrivé là, j'aurais tendance à dire que c'est fini, ou du moins que le plus dur est fait, mais je vais continuer un peu.

La formule que l'on vient de trouver donne celle de la trace de D , en permutant les lettres a et b :

$$\text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i}$$

Les deux signes $\sum$ peuvent être intervertis dans ces sommes (commutativité des sommes finies d'éléments de $\mathbf{R}$) :

$$\text{tr}(C) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,k} b_{k,i}$$

$$\text{tr}(C) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,k} b_{k,i}$$

On peut même intervertir les lettres i et k en faisant attention (on pourrait aussi mettre d'autres lettres à la place) :

$$\text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{i,k}$$

Par commutativité de la multiplication dans $\mathbf{R}$, on a pour tous les couples (i, k) d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{k,i} b_{i,k} = b_{i,k} a_{k,i}$, d'où :

$$\text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i}$$

On reconnaît l'expression de la trace de D , par conséquent : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

→ Exercice colle :

Déterminer la méthode de M^n avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

↳ Penser à la division euclidienne de X^n par le polynôme caract.

↳ Penser à la décomposition de Dunford

$$M = \begin{bmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix} = (b-a)I_n + a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ici I_n et $C^{\rightarrow}$ commutent donc on peut utiliser le binôme de Newton pour avoir M^n .

