

Dev n° 20

Réf: Julien Bernis, Laurent Bernis
 "Analyse par l'agrégation de
 mathématiques, 40 développements"
 p 73 - 77

Titre: Cauchy-Lipschitz linéaireThm:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A: \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ et $B: \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n})$ deux applications continues et $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Alors, le pb de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t) & (*) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Démon:

• Recherche sol. sur un intervalle:

Soit $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ t.q. $0 \in I$ et $I \neq \emptyset$.

On cherche une sol. à (*) sur I .

Posons: $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $f(t, x) := A(t)x + B(t)$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $t \mapsto \|A(t)\|_{\mathcal{L}}$ continue sur I .

Donc, g est bornée sur I . Notons $M \in \mathbb{R}^{++}$ la est t.q.: $\|A(t)\|_{\mathcal{L}} \leq M \forall t \in I$.

Par prop. des normes d'opérateurs linéaires, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall t \in I$,

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Donc, f est glob. lip. p/r à x , $\forall t \in I$.

• Remarque:

Notons $E = (\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\infty})$ et $F = (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\infty})$.

Soit $L: E \rightarrow F$, $\varphi \mapsto (L(\varphi) := t \mapsto y_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s)) ds)$

Par le thm fondamental de l'analyse, L est à valeur dans F .

De plus, $\forall \varphi \in E$, $\forall t \in \mathbb{R}$, on a:

$$L(\varphi)'(t) = f(t, \varphi(t)) = A(t)\varphi(t) + B(t) \text{ et } L(\varphi)(0) = y_0.$$

Donc, si φ est un point fixe de L , alors c'est une sol. sur I , de classe $\mathcal{C}^1$, de (*).

De même, si φ est sol. sur I de (*), alors, par intégration c'est un pt fixe de L .

Effectivement, si φ est sol. alors $\varphi' = A(t)\varphi + b(t)$.

$$\begin{aligned} \text{Et } L(\varphi)(t) &= y_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s)) ds \\ &= y_0 + \int_0^t A(s)\varphi(s) + b(s) ds \\ &= y_0 + \int_0^t \varphi'(s) ds \\ &= y_0 + \varphi(t) - \varphi(0) \\ &= \varphi(t) \end{aligned}$$

Donc, $L(\varphi)(t) = \varphi(t)$.

On a bien φ un pt fixe de L .

R.q.: si φ pt fixe de L (s sol. sur I de classe $\mathcal{C}^1$ de (*).

• On souhaite donc m.q. φ est pt fixe de L :

- On souhaite donc m.g. φ est pt fixe de L :

On va utiliser pour cela le thm de Picard.

Montrons par récurrence sur p que :

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \forall t \in I, \text{ on a : } \|L^p(\varphi_1)(t) - L^p(\varphi_2)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\Gamma^p |t|^p}{p!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty}$$

(I) $p=1$

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in E$ et $t \in I$.

On a :

$$\begin{aligned} \|L(\varphi_1)(t) - L(\varphi_2)(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \left| \int_0^t \|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\|_{\mathbb{R}^n} ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t \Gamma \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty} ds \right| \\ &\leq \Gamma |t| \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty} \end{aligned}$$

(H) On suppose le rang K vraie montrons le pour $K+1$.

On a :

$$\begin{aligned} \|L^{K+1}(\varphi_1)(t) - L^{K+1}(\varphi_2)(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \left| \int_0^t \|f(s, L^K(\varphi_1)(s)) - f(s, L^K(\varphi_2)(s))\|_{\mathbb{R}^n} ds \right| \\ &\leq \frac{\Gamma^{K+1}}{K!} \int_0^t |s|^K \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty} ds \quad \text{h. récurrence} \\ &\leq \frac{\Gamma^{K+1}}{(K+1)!} |t|^{K+1} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty} \end{aligned}$$

o.c.l. : La propriété est vraie.

Comme $t \in I$ on a $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\Gamma^p |t|^p}{p!} = 0$. (comme terme générale d'une série exponentielle)

On a donc un rang P t.q. $0 < \frac{\Gamma^P |t|^P}{P!} < 1$.

Donc, L^P est contractante sur le Banach $(E, \|\cdot\|_{\infty})$.

D'après le thm de Picard, $\exists ! \varphi_0 \in E$ t.q. $L^P(\varphi_0) = \varphi_0$.

Comme $L^P(L(\varphi_0)) = L(\varphi_0) \Rightarrow L(\varphi_0)$ aussi pt fixe de L .

Tout point fixe de L est aussi point fixe de L^P .

Donc, φ_0 est l'unique point fixe de L .

Donc, φ_0 est l'unique sol. sur I de (*) $\square$

* Annexe :

- Construction une sol. globale :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, posons $K_p = [-p; p]$ et $\varphi_p \in \mathcal{C}^1(K_p, \mathbb{R}^n)$ l'unique sol. de (*) sur K_p .

Tout réel t est élément d'un des K_p .

Posons $g(t) = \min \{p \in \mathbb{N}^*, t \in K_p\}$ de sorte que $t \in K_{g(t)}$.

$\varphi := \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n; t \mapsto \varphi_{g(t)}(t)$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, t_0 est intérieur à $K_{g(t_0)+1}$. Par unicité de la sol. de (*)

sur $K_{g(t_0)+1}$, $\forall p \in [1, g(t_0)]$, φ_p coïncide avec $\varphi_{g(t_0)+1}$ sur K_p de sorte que sur $K_{g(t_0)+1}$, voisinage de t_0 , φ coïncide avec $\varphi_{g(t_0)+1}$.

Donc, φ dérivable en t_0 et $\varphi'(t_0) = A(t_0)\varphi(t_0) + B(t_0)$.

Comme t_0 quelconque et $\varphi(0) = \varphi_1(0) = y_0$, φ sol sur $\mathbb{R}$ de (*).

Toute sol. $\tilde{I}$ de (*) sur $\mathbb{R}$, par unicité de sol. de (*) sur $K_{g(t_0)+1}$ coïncide sur $] - (g(t_0)+1) ; g(t_0)+1 [$ avec $\tilde{I}_{g(t_0)+1}$ donc, on vient de le voir, avec I . Donc $\tilde{I}(t_0) = I(t_0)$.
Donc I est l'unique sol. sur $\mathbb{R}$ de (*).

• Thm Picard-Banach:

Théorème du point fixe de Banach-Picard : Soit (E, d) un espace métrique complet, et $f : E \rightarrow E$ une application contractante, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors f possède un unique point fixe ℓ . De plus, toute suite (u_n) définie par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$, converge vers ℓ et on a les estimations suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, d(u_n, \ell) \leq k^n d(u_0, \ell).$
- $\forall n \in \mathbb{N}, d(u_n, \ell) \leq \frac{k}{1-k} d(u_n, u_{n-1}).$

Demo voir dev 19

• Thm fondamental de l'analyse:

Soient f une fonction localement Riemann-intégrable^{N3} sur un intervalle I , a un point de I , et F l'application intégrale associée, définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

(t étant une variable muette d'intégration).

Un énoncé simplifié courant est :

Si f est continue sur I alors :

- F est dérivable sur I et sa dérivée est égale à f ;
- Si G est une primitive de f , alors la fonction $G - F$ est constante.

• $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach:

Utiliser suite de Cauchy et critère de Cauchy.

• Thm général:

Théorème (Cauchy-Lipschitz) : Soit l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, avec f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Si (t_0, y_0) est un point de U , il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, et $y(t_0) = y_0$. Cette solution est définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 . En outre, toute autre solution à ce même problème de Cauchy est restriction de la solution maximale.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, f est localement lipschitzienne en la seconde variable. C'est souvent ce que l'on rencontre dans la pratique, et le théorème de Cauchy-Lipschitz est alors applicable.

Ce théorème illustre le déterminisme en physique classique. Si un système suit une loi d'évolution donnée, les mêmes causes (i.e. le même problème de Cauchy) produisent les mêmes effets.

Exemple de fonction non globalement lip

$$(*) \begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Démo:

* Recherche sol. sur un intervalle:

Soit $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ t.q. $0 \in I$ et $I \neq \emptyset$.

Posons,

$$f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; f(t, x) = A(t)x + B(t),$$

$$g: I \rightarrow \mathbb{R}; g(t) = \|A(t)\|_{\infty} \text{ continue sur } I.$$

Donc, g bornée sur I par $M \in \mathbb{R}^{++}$.

Par prop. des normes opérateurs, on a:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \forall t \in I, \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Donc, f est glob. lip. p/r à x , $\forall t \in I$.

* Remarque:

Notons: $E = (C^0(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\infty})$ Banach,

$$F = (C^1(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\infty}).$$

$$\text{Soit } L: E \rightarrow F; \ell \mapsto (L(\ell)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, \ell(s)) ds, \forall t \in I)$$

Par le thm fondamental de l'analyse, L est bien à valeurs dans F .

De plus, $\forall \ell \in E, t \in I$ on a:

$$L(\ell)'(t) = f(t, \ell(t)) = A(t)\ell(t) + B(t) \text{ et } L(\ell)(0) = y_0.$$

R.q.: si ℓ pt fixe de L ($\Leftrightarrow \ell$ sol. C^1 de $(*)$).

* M.g. L admet un pt fixe:

Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, m.g.:

$$\mathcal{P}_p: \forall \ell_1, \ell_2 \in E, \forall t \in I, \text{ on a: } \|L^p(\ell_1)(t) - L^p(\ell_2)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{M^p t^p}{p!} \|\ell_1 - \ell_2\|_{\infty}$$

(I) $p=1$. Soient $\ell_1, \ell_2 \in E$ et $t \in I$. On a:

$$\|L(\ell_1)(t) - L(\ell_2)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \left| \int_0^t \|f(s, \ell_1(s)) - f(s, \ell_2(s))\|_{\mathbb{R}^n} ds \right|$$

$$\leq \left| \int_0^t M \|\ell_1 - \ell_2\|_{\infty} ds \right|$$

$$\leq M|t| \|\ell_1 - \ell_2\|_{\infty}$$

(H) S.g. $\mathcal{P}_k$ vraie pour $k \in \mathbb{N}^*$. M.g. $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

On a:

$$\|L^{k+1}(\ell_1)(t) - L^{k+1}(\ell_2)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \left| \int_0^t \|f(s, L^k(\ell_1)(s)) - f(s, L^k(\ell_2)(s))\|_{\mathbb{R}^n} ds \right|$$

$$\stackrel{\text{hyp.}}{\leq} \frac{M M^{k+1}}{k!} \left| \int_0^t |s|^k \|\ell_1 - \ell_2\|_{\infty} ds \right|$$

$$\leq \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} \|\ell_1 - \ell_2\|_{\infty} |t|^{k+1}$$

(CCL) OK

$$\text{On a: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M^n t^n}{n!} = 0$$

$$\text{Donc, } \exists p \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } 0 < \frac{M^p t^p}{p!} < 1$$

Donc, L^p contractante et $F \subset E$. Donc par le thm du pt fixe de Picard et son corollaire, on a $\exists ! \ell_0$ point fixe de L .

Donc, ℓ_0 est l'unique sol. C^1 sur I de $(*)$ $\square$