

Dev n° 16Titre: Critère de Sylvester

Thm: (p 247-249)

Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$.

On note:

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, M_k := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}.$$

Alors,

$$M \text{ définie positive} \iff \begin{matrix} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det M_k > 0. \\ M \in S_n^+(\mathbb{R}) \end{matrix}$$
 les mineurs principaux sont strict. positifs.

Lemme: (p 233)

Soit (E, q) un e.q. et F un ss-e.v. de E de dim finie.On note $\perp$ la forme polaire associée à q .Si $q|_F$ est définie, alors $E = F \oplus F^\perp$.

Démon: (Lemme)

• M.g. $F \cap F^\perp = \{0\}$:Soit $x \in F \cap F^\perp$ alors $\perp(x, x) = 0 = q(x) = q|_F(x)$
alors $x = 0$ car $q|_F$ est définie.Donc, $F \cap F^\perp = \{0\}$ • $\forall x \in E, \exists y \in F, z \in F^\perp$ t.q. $x = y + z$:Soit $k = \dim F$. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ base ortho. de F .Soit $x \in E$.Posons $\lambda_i = \frac{\perp(e_i, x)}{q(e_i)}$, $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \in F$.Alors, $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \perp(e_j, x - y) &= \perp(e_j, x) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \perp(e_j, e_i) \\ &= \perp(e_j, x) - \underbrace{\lambda_j \perp(e_j, e_j)}_{=0} \\ &= \perp(e_j, x) - \frac{\perp(e_j, x)}{\perp(e_j, e_j)} \perp(e_j, e_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $z := x - y \in F^\perp$ Donc $x = z + y$ où $y \in F$ et $z \in F^\perp$.

• Conclusion:

$$E = F \oplus F^\perp \quad \square$$

Démon: (Thm)

On prouve par double implication.

☐ Notons q la F.Q. associée à la matrice M dans la base canonique

On prouve par double implication.

⇒ Notons q la F.Q. associée à la matrice M dans la base canonique $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, M_k est la matrice de $q|_{\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)}$.

↑ F.Q. déf. positive comme restriction d'une F.Q. déf. positive

Donc, M_k est déf. positive.

Donc toutes les valeurs propres de M_k sont strict. positives.

Donc, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det M_k > 0$.

⇒ Provenons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Prenons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \{ M \in S_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \det(M_k) > 0 \Rightarrow M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \}$

• Initialisation:

$n=1$. $M = [a]$ $a \in \mathbb{R}^{++}$.

On a directement $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

OK

• Hérédité:

S.q. P_k est vraie par $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

M.q. P_n est vraie.

Notons $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $q|_H$ est définie positive.

Notons $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une B.O.N. par $q|_H$ (possible par le thm spectral)

On a que $H \oplus H^\perp = \mathbb{R}^n$ (car $q|_H$ définie)

Prenons $e_n \in H^\perp \setminus \{0\}$.

On a que $\beta' = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ où la matrice de q est de la forme:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

Notons P la matrice de passage de β à β' .

On a:

$$N = {}^t P M P \Rightarrow \det(N) = \underbrace{\det(P)}_{>0}^2 \underbrace{\det(M)}_{>0} > 0$$

Donc, $\alpha > 0$.

Donc, N est diag. avec des coef. strict. positifs $\rightsquigarrow N \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

$\rightsquigarrow M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Donc, q définie positive.

Donc P_n est vérifiée.

• Conclusion:

Par initialisation et hérédité on a que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Annexe:

• Voir colle 22 thm spectrale.

• Application:

$$\text{M.g. } A = \left(\frac{1}{1 + |i - j|} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

EXERCICE 5. a) Soit une application continue

$$M : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad t \mapsto M(t) = [a_{i,j}(t)]_{1 \leq i, j \leq n},$$

telle que pour tout $t \in]0, 1[$, $M(t)$ est symétrique définie positive. Montrer que la matrice

$$A = \int_0^1 M(t) dt = \left(\int_0^1 a_{i,j}(t) dt \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

est symétrique définie positive.

b) Application. Montrer que la matrice

$$A = \left(\frac{1}{1 + |i - j|} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

est définie positive (on pourra utiliser le critère de Sylvester, voir l'exercice précédent).

Solution. a) Il est clair que la matrice A est symétrique. Maintenant, remarquons qu'une somme finie de matrices $(M_i)_{1 \leq i \leq p}$ symétriques définies positives est définie positive. En effet, il suffit

de remarquer que pour tout vecteur colonne $X \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall i, {}^t X M_i X > 0 \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^p {}^t X M_i X = {}^t X \left(\sum_{i=1}^p M_i \right) X > 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $X \neq 0$, on a prouvé que $\sum_i M_i$ est définie positive.

Ici, on a affaire non pas à une somme finie, mais une somme continue. On procède de la même manière. Fixons un vecteur colonne X de $\mathbb{R}^n$, $X \neq 0$. Pour tout $t \in]0, 1[$, on a ${}^t X M(t) X > 0$, donc par continuité de $t \mapsto {}^t X M(t) X$

$$\int_0^1 {}^t X M(t) X dt > 0 \quad \text{ou encore} \quad {}^t X \left(\int_0^1 M(t) dt \right) X = {}^t X A X > 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $X \neq 0$, A est définie positive.

b) On remarque que

$$\frac{1}{1 + |i - j|} = \int_0^1 t^{|i-j|} dt.$$

D'après a), le résultat sera prouvé si on montre que pour tout $t \in]0, 1[$, la matrice symétrique $M(t) = (t^{|i-j|})_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive.

Pour tout r , $1 \leq r \leq n$, on pose $D_r(t) = \det(t^{|i-j|})_{1 \leq i, j \leq r}$. Nous allons prouver que $D_r(t) = (1 - t^2)^{r-1}$ ce qui prouvera, en vertu du critère de Sylvester, que $M(t)$ est définie positive pour $t \in]0, 1[$.

On procède par récurrence sur r . Pour $r = 1$, c'est évident car $D_1(t) = 1$. Supposons le résultat vrai au rang r et montrons le au rang $r + 1$. En retranchant à la dernière colonne t fois l'avant dernière, on obtient

$$D_{r+1}(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^{r-1} & t^r \\ t & 1 & \ddots & \ddots & t^{r-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ t^{r-1} & \ddots & \ddots & 1 & t \\ t^r & t^{r-1} & \dots & t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^{r-1} & 0 \\ t & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ t^{r-1} & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ t^r & t^{r-1} & \dots & t & 1 - t^2 \end{vmatrix} = (1 - t^2) D_r(t),$$

d'où le résultat.

• $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$

Démonstration:

$$F_n : M \mapsto \det(M_n) \text{ où } F_n : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \bigcap_{k=1}^n F_k^{-1}(\mathbb{R}^{++})$$

intersection
d'ouvert

continue

ouvert

ouvert

- Est-ce qu'on a : " $\Gamma \in S_n(\mathbb{A})$."

Non car ex: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in S_n$ mais pas $S_n^+(\mathbb{R})$ alors que $\det(\Gamma_k) \geq 0$.

Par contre on a $\Gamma \in S_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(\Gamma_k) \geq 0, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Effectivement, on peut noter $\Gamma = \lim_{i \rightarrow +\infty} S_i$ avec $S_i \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Par continuité du det et de la projection de Γ sur Γ_k on a :
 $0 \leq \lim \det(S_{i,k}) = \lim \det \Gamma_k$.

Donc, on a la prop.

- $\Gamma \in S_n^+$ avec dans S_n sans le critère :

Démo:

Exercice 1. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sans utiliser le critère de Sylvester. Quel est son intérieur dans $M_n(\mathbb{R})$? Quel est son adhérence dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

Solution : • **Preuve 1 :** On va montrer que le complémentaire $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Soit donc $A \in \overline{\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$, il existe une suite $(A_k)_k$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ convergente vers A qui est donc symétrique ; enfin, comme pour tout entier k il existe un vecteur X non nul tel que $\langle X_k, A_k X_k \rangle \leq 0$. Quitte à remplacer X_k par $X_k / \|X_k\|$ il ne coûte rien de supposer les vecteurs X_k de norme 1. Maîtrisons on peut extraire de la suite X_k une sous suite $(X_{k_l})_l$ convergente vers X non nul (car $\|X\| = \lim_l \|X_{k_l}\| = 1$). Enfin $\langle X, AX \rangle = \lim_l \langle X_{k_l}, A_{k_l} X_{k_l} \rangle \leq 0$, donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est bien fermé.

• **Preuve 2 :** On va montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est voisinage de chacun de ses points dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifie $\langle X, SX \rangle > 0$ pour tout $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et par conséquent avec un argument de continuité/compacité, il existe $r > 0$ tel que

$$\langle X, SX \rangle \geq r > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \text{ vérifiant } \|X\| = 1.$$

Alors pour toute matrice $A \in B_{\mathcal{S}_n}(S, r/2) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) : \|M - S\| < r/2\}$ ($\|A\|$ est la norme sur $M_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$) et tout vecteur X de norme 1 :

$$\langle X, AX \rangle = \langle X, AX - SX \rangle + \langle X, SX \rangle.$$

Mais $\langle X, SX \rangle \geq r$ et vu Cauchy-Schwarz

$$|\langle X, AX - SX \rangle| \leq \|X\| \cdot \|AX - SX\| = \|AX - SX\| \leq \|A - S\| \cdot \|X\| = \|A - S\| < r/2$$

et par conséquent

$$\langle X, AX \rangle = \langle X, AX - SX \rangle + \langle X, SX \rangle > -r/2 + r = r/2 > 0$$

et la matrice symétrique A est bien définie positive.

• **Preuve 3 :** Une conséquence immédiate du critère de Sylvester (exercice 8) est que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ mais c'est un peu trop sophistiqué comme preuve...

• **Preuve 4 :** On sait (voir l'exercice 83) que l'exponentielle induit un homéomorphisme de l'espace vectoriel normé $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, le résultat suit. CQFD. ■

Remarques : • On a en fait démontré que pour toute matrice (pas nécessairement symétrique) vérifiant $\|A - S\| < r/2$ on a $\langle X, AX \rangle > r/2$ pour tout $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$; mais cela n'assure absolument pas que A soit symétrique ! Et il y a dans cette boule beaucoup de matrices non symétriques, en effet $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui est d'intérieur vide dans $M_n(\mathbb{R})$ comme sous espace vectoriel strict d'un espace vectoriel normé (on peut aussi vérifier facilement à la main que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est d'intérieur vide).

• Par contre dans $M_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie d'intérieur vide (car incluse dans le sous espace vectoriel donc d'intérieur vide $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$), convexe stable par transposée et passage à l'inverse de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

• On peut aussi montrer que $\text{Vect. } \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

L'inclusion « $\subset$ » est évidente. Pour l'autre, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{R}$, alors il existe une matrice orthogonale P telle que $A = P^t \cdot \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$ et si $\alpha > \max |\lambda_i|$ alors $A = B_1 - B_2$ où $B_1 = P^t \cdot \text{Diag}(\lambda_1 + \alpha, \dots, \alpha + \lambda_n) P$ et $B_2 = P^t \cdot \text{Diag}(\alpha, \dots, \alpha) P$, mais $B_1, B_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Vect. } \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. CQFD.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. $P_n: M \in S_n(\mathbb{R})$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(M_k) > 0 \Rightarrow M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

(I) OK

(H) Soit P_k vraie $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. M, q, P_n vraie.Notons $H := \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.Par h., $q|_H$ déf. positive.Par le thm spectral $\exists (e'_1, \dots, e'_{n-1})$ BON pour $q|_H$ Par le lemme: $\mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$.Posons $e'_n \in H^\perp \setminus \{0\}$ et $\beta' := (e'_1, \dots, e'_{n-1}, e'_n)$ base de $\mathbb{R}^n$.

On a:

$$\text{Mat}(q)_{\beta'} = N = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Notons P la matrice de passage de β à β' .

On a:

$$N = {}^t P M P \Rightarrow \alpha = \det(N) = \underbrace{\det(P)^2}_{>0} \underbrace{\det(M)}_{>0} > 0$$

Donc, N diag. avec coef. positivesDonc, $N \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.Donc, $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ P_n vraie.(CCL) OK $\square$

Thm:

$$M := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in S_n(\mathbb{R}).$$

On note $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, M_k := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$.

Alors,

$$M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(M_k) > 0$$

Lemme:

 (E, q) e.q et F ss.ev. de E . $\perp$ forme polaire associée à q .Si $q|_F$ définie $\Rightarrow E = F \oplus F^\perp$.

Dém: (Lemme)

• M.g $F \cap F^\perp = \{0\}$:Soit $x \in F \cap F^\perp$. On a $\perp(x, x) = 0 \Leftrightarrow q(x) = 0 = q|_F(x) \Rightarrow x = 0$.• $\forall x \in E$, se décompose dans F et $F^\perp$:Posons $k := \dim(F)$ et $(e_1, \dots, e_k)$ base ortho. de F .Soit $x \in E$.Posons: $\lambda_i = \frac{\perp(e_i, x)}{q(e_i)}, \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \in F$.Alors, $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \perp(e_j, x - y) &= \perp(e_j, x) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \perp(e_j, e_i) \\ &= \perp(e_j, x) - \lambda_j \perp(e_j, e_j) = 0 \end{aligned}$$

Donc $z := x - y \in F^\perp$.Donc $x = z + y$ avec $z \in F^\perp$ et $y \in F$ $\square$

Dém: (Thm)

 $\Rightarrow M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et q la F.Q. associée à M dans β (base can.) $\beta = (e_1, \dots, e_n)$.Soit $M_k = \text{Mat}(q|_{\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)})$, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $\uparrow$ déf. positive.Donc, $\det M_k > 0, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.