

Réf: Gardon "Analyse"
p 312 ou 315
↑ v3

Dev n° 14

Titre : Étude de la fonction Gamma sur la droite réelle

Proposition:

Soit $x > 0$.

On a $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

① Γ est e^0 ($\mathbb{R}^{++}$)

② $\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{(\log(t))^p e^{-t} t^{x-1}}_{:= f_p(x,t)} dx, \quad \forall p \in \mathbb{N}$

③ Γ convexe sur $\mathbb{R}^{++}$

④ $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ ⑤ $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$

⑥ Allure du graphe

Démo:

① On va utiliser les thm des intégrales à paramètres et une récurrence.

* Preliminaires:

$x > 0$ et $t > 0$. Posons $f_p(x, t) = (\log(t))^p t^{x-1} e^{-t} \geq 0$.

On r.q. $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f_0(x, t) dt$ et $f_0^{(p)}(x, t) = f_p(x, t)$

Prenons $I[a; b] \subset]0; +\infty[$ avec $1 \in I$. On a:

* t fixe; $x \mapsto f_p(x, t)$ continue

* On a par $x \in I$:

$$|f_p(x, t)| \leq \mathcal{L}_p(t) \begin{cases} |\log(t)|^p t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1[\\ (\log(t))^p e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

On remarque :

$$\mathcal{L}_p(t) = o_{t \rightarrow 0^+}(t^{a/2-1}) \quad \uparrow \text{ int. en 0 par Riemann}$$

$$\text{et } \mathcal{L}_p(t) = O_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t/2}) \quad \uparrow \text{ int. sur } [1; +\infty[$$

* Récurrence:

① $p=0$, on a appliqué le thm de continuité d'une int. à paramètre avec $f_0(x, t)$ et la majoration $\mathcal{L}_0$.

On a $\Gamma \in \mathcal{C}^0([a; b])$.

Comme c'est sur tout compact $\subset \mathbb{R}^{++}$, on a $\Gamma \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{++})$

② S.q. vrai au rang k . M.q. $k+1$.

On applique le thm des fonctions e^k définies par une intégrales à paramètre avec $f_{k+1}(x, t)$ majoré par $\mathcal{L}_{k+1}(t)$ intégrable sur $[a; b]$ et continue p/r à x .

$\rightsquigarrow$ Identiquement, $\Gamma \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^{++})$

(CCL) $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{++})$

② Et on a obtenu $\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} f_p(x, t) dt$

③ M.q. Γ est convexe:

③ M.q Γ est convexe :

Par $k=2$: $f_p(x,t) \geq 0$

Donc,

$\Gamma'' > 0$ car son intégrande est positive.

Donc,

Γ est convexe.

④ Soit $x \in \mathbb{R}^{**}$.

On a, formellement :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= \underbrace{\left[-t^x e^{-t} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt}_{=x \Gamma(x)} \quad \downarrow \text{I.P.P} \\ &= x \Gamma(x). \end{aligned}$$

$u = t^x \quad v = -e^{-t}$
 $u' = x t^{x-1} \quad v' = e^{-t}$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^{**}, \quad \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

⑤ On a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Par récurrence et avec ④.

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \dots = n! \Gamma(1)$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!$$

⑥ * Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $x \Gamma(x) = \Gamma(x+1) \sim \Gamma(1) = 1$.

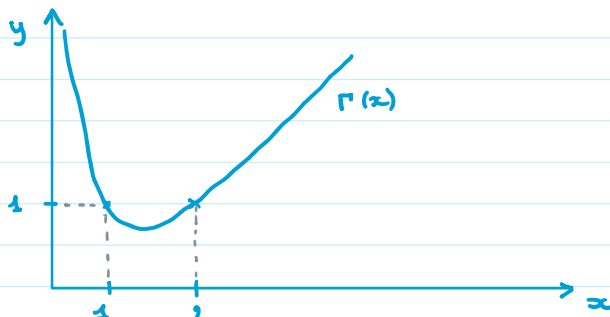
Donc, $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} 1/x$.

* $\Gamma(n+1) = n! \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\sim} +\infty$, donc $\Gamma(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{\sim} +\infty$.

et $\frac{\Gamma(x+1)}{x} = \Gamma(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{\sim} +\infty$ $\sim$ branche parabolique en $+\infty$

* Γ continue, convexe, $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$.

On obtient :



Annexe :

• Formule d'Euler - Gauss

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

- Formule d'Euler - Gauss

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

- M.q. Γ est log convexe :

Démo:

$$\Gamma(\theta x + (1-\theta)y) = \int_0^{+\infty} \underbrace{(e^{-t} + t^{x-1})^\theta}_f \underbrace{(e^{-t} + t^{y-1})^{1-\theta}}_g dt \quad p = \frac{1}{\theta}, q = \frac{1}{1-\theta}$$

$$\stackrel{\text{Holder}}{\leq} \left(\int_0^{+\infty} f^{1/\theta} \right)^\theta \left(\int_0^{+\infty} g^{1/(1-\theta)} \right)^{1-\theta}$$

$$= \Gamma(x)^\theta \Gamma(y)^{1-\theta}$$

En passant au log:

$$\log(\Gamma(\theta x + (1-\theta)y)) \leq \theta \log(\Gamma(x)) + (1-\theta) \log(\Gamma(y))$$

Donc, Γ est log convexe.

Prop:

$$\Gamma: x \in \mathbb{R}^{++} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

① $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{++})$

② $\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{(\log(t))^p e^{-t} t^{x-1}}_{:= f_p(x,t)} dx, \forall p \in \mathbb{N}$

③ Γ convexe

④ $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ ⑤ $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$

⑥ Graphes de Γ

Démo:

① * Préliminaires:

Prendons $I = [a; b] \subset]0; +\infty[$ et $\lambda \in I$.

On a, pour $x \in I$:

$$|f_p(x,t)| \leq \mathcal{L}_p(t) = \begin{cases} |\log(t)|^p e^{a-1} & t \in]0; 1[\\ |\log(t)|^p t^{b-1} e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

R.q: $\mathcal{L}_p(t) = \mathcal{O}(t^{a/2-1})$ et $\mathcal{L}_p(t) = \mathcal{O}(e^{-t/2})$
 (int. sur $]0; 1[$) (int. sur $[1; +\infty[$)

* Récurrence:

① $p=0$. Par le thm des fct continue déf. par une int. à paramètre avec $|f_0(x,t)|$ majoré par $\mathcal{L}_0(t)$ int.

Donc, $\Gamma \in \mathcal{C}^0(I) \Rightarrow \Gamma \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{++})$

② S.g vrai au rang k .

Par le thm des fct e^{k+1} déf par une int. à

par. $\Rightarrow \Gamma \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$

$\Rightarrow \Gamma \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^{++})$

CC1: $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{++})$

② OK

③ On a pour $k=2$; $f_2(x,t) \geq 0 \Rightarrow \Gamma'' > 0$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$$

$$\text{I.P.P} = \underbrace{\left[-e^{-t} t^x \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} x e^{-t} t^{x-1} dt}_{x \Gamma(x)}$$

Donc, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

⑤ R.q: $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

Avec ④, par récurrence: $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$

⑥ * $\left. \begin{array}{l} \Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \\ \Gamma(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma(x) \sim_0 \frac{1}{x}$

* $\Gamma(n+1) = n! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{\Gamma(x+1)}{x} = \Gamma(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

* Γ continue, convexe, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$:

