

Dev n° 13Titre: Générateur de $SL_n(\mathbb{K})$ et $GL_n(\mathbb{K})$ $M_{n,m}$
lignes $\rightarrow$ n, colonnes $\rightarrow$ mOn fixe $n \in \mathbb{N}^*$. $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \det M = 1\}$.Par $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on note $E_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1.

On appelle : • matrices de transvection les matrices de la forme

$$I_n + \lambda E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } i \neq j, \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}.$$

• matrices de dilatation les matrices

$$D_n(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{K}) \quad \text{avec } \alpha \in M_n(\mathbb{K})$$

Thm:

- 1) $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvection et dilatation.
- 2) $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.

Démo:

- 1) * Montrons d'abord que une matrice de transvection est inversible d'inverse une matrice de transvection.

Pour $i \neq j$, on a $E_{ij}^2 = 0 \Rightarrow E_{ij}$ nilpotente d'ordre 2.

De plus,

$$(I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \lambda E_{ij}) = I_n^2 - \lambda^2 E_{ij}^2 = I_n.$$

Donc,

$$I_n + \lambda E_{ij} \text{ inversible d'inverse } I_n - \lambda E_{ij}.$$

* $A \in GL_n(\mathbb{K})$. P.q. $\exists B_1, \dots, B_p, B'_1, \dots, B'_q$ t.q.

$$A = B_1 \cdots B_p \cdot D_n(\det A) \cdot B'_1 \cdots B'_q.$$

Procédons par récurrence sur n .(I) Si $n=1$.On a $\det A = A$ ok.(H) S.q. résultat vraie au rang $n-1$.Montrons le au rang n .Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ donc A inversible et sa 1^{er} colonne est non nulle. Il existe donc $T_1 = I_n + \lambda E_{2,1}$ t.q. le coef. d'indice $(2,1)$ de $T_1 A$ soit non nul.Après, $\exists \mu$ t.q. si $T_2 = I_n + \mu E_{1,2}$, alors $T_2 T_1 A$ a comme coef. $(1,1)$ égal à 1.Donc, on peut trouver des matrices de transvections $B_1, \dots, B_p$ (de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$) t.q.

Donc, on peut trouver des matrices de transvections $B_1, \dots, B_p$ (de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$) t.q.

$$(B_1 \dots B_p) (T_2 T_1 A) = \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x \\ 0 & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x & \dots & x \end{bmatrix}$$

De même, $\exists B'_1, \dots, B'_q$ des matrices de transvections de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$ t.q.

$$(B_1 \dots B_p) (T_1 T_2 A) (B'_1 \dots B'_q) = A' \text{ avec } A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Or $\det A = \det B$.

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $\exists C_1, \dots, C_r$ et $C'_1, \dots, C'_s \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ t.q. $B = C_1 \dots C_r D_{n-1}(\det A) C'_1 \dots C'_s$.

Prenons :

$$F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & c_i & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \text{ et } F'_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & c'_j & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Ainsi, $A' = F_1 \dots F_r D_n(\det A) F'_1 \dots F'_s$.

Donc,

$$A = T_2^{-1} T_1^{-1} B_p^{-1} \dots B_1^{-1} F_1 \dots F_r D_n(\det A) F'_1 \dots F'_s \cdot B_q^{-1} \dots B'_1^{-1}$$

Comme on a m.q. l'inverse d'une transvection est une transvection, on a fini.

2) Or pour $A \in SL_n(\mathbb{K})$, $\det A = 1$.

Donc, $\forall n$, $D_n(\det A) = I_n$.

Donc, tout élément de $SL_n(\mathbb{K})$ est un produit de transvections. $\square$

Annexe :

• $I_n + a E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & \\ & \searrow & & \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}$

• $(I_n + \lambda E_{ij}) \Pi$ se déduit de Π en ajoutant à la i -ième ligne de Π λ fois la j -ième

Démonstration : $[(I_n + \lambda E_{ij}) \Pi]_{k,p} = \sum_{m=1}^n [I_n + \lambda E_{ij}]_{k,m} \Pi_{m,p} = \begin{cases} \Pi_{k,p} + \lambda \Pi_{j,p} & \text{si } k=i \\ \Pi_{k,p} & \text{si } k \neq i \end{cases}$

• $M(I_n + \lambda E_{ij})$ se déduit de Π en ajoutant à la j -ième colonne de Π λ fois la i -ième.

• Le centre de $GL_n(\mathbb{K}) = \{ \text{homothéties de } M_n(\mathbb{K}) \} \cong \mathbb{K}^*$

Le centre de $SL_n(\mathbb{K}) = \{ \lambda I_n \mid \lambda^n = 1 \}$
 $= \{ \text{racines } n\text{-ième de l'unité dans } \mathbb{K} \}$

- Appli: si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $SL_n(K)$ est connexe (par arcs)

Dém: Si $M \in SL_n(K)$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ tq

$$M = T_{i_1, j_1}(\lambda_1) \dots T_{i_n, j_n}(\lambda_n).$$

Alors $\gamma: [0, 1] \longrightarrow SL_n(K)$ est continue et $\begin{cases} \gamma(0) = M \\ \gamma(1) = I_n \end{cases}$

$$t \longmapsto \prod_{k=1}^n T_{i_k, j_k}((1-t)\lambda_k)$$

On peut donc relier toute matrice de $SL_n(K)$ à I_n par un chemin continu. $\square$

- Appli: $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes: $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.

Dém: $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \sqcup GL_n^-(\mathbb{R})$ donc il suffit de vérifier la connexité (par arcs) de ces deux ensembles.

Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ on pose $\mu = \det M$. et $D(x) = D_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix}$

• Dans $GL_n^+(\mathbb{R})$: on relie $M \in GL_n^+(\mathbb{R})$ à I_n .

D'après le théorème, on écrit $M = \prod_{k=1}^n T_{i_k, j_k}(\lambda_k) \circ D(\mu)$.

Alors $\gamma: [0, 1] \longrightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$ est continue

$$t \longmapsto \prod_{k=1}^n T_{i_k, j_k}((1-t)\lambda_k) D((1-t)\mu + t)$$

et $\begin{cases} \gamma(0) = M \\ \gamma(1) = I_n \end{cases}$

• Dans $GL_n^-(\mathbb{R})$: on relie $M \in GL_n^-(\mathbb{R})$ à $J = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$.

on prend $\gamma: t \in [0, 1] \longmapsto \prod_{k=1}^n T_{i_k, j_k}((1-t)\lambda_k) D((1-t)\mu - t)$

continue de $\gamma(0) = M$ à $\gamma(1) = J$. $\square$

Thm:

- ① $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et dilatations
- ② $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections

Rappel:

Dilatation : $D_n(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$

Transvection : $I_n + \lambda E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ j-ème

$(I_n + \lambda E_{ij}) \mapsto L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
 $\mapsto C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

Demo:

1) * Π .q matrice de trans et inv. d'inv. une transv.:

R.q: $\forall i \neq j, E_{ji}^2 = 0 \Rightarrow E_{ij}$ nilpotente d'ordre 2.

On a : $(I_n + \lambda E_{ij})(I_n - \lambda E_{ij}) = I_n^2 - \lambda^2 E_{ij}^2 = I_n$.

Donc, $I_n + \lambda E_{ij}$ d'inverse $I_n - \lambda E_{ij}$.

* $A \in GL_n(\mathbb{K})$ Π .q A est le produit de transv. et dilatation:

Par récurrence sur $n = \dim E$.

① $n=1$.

On a $\det A = a_{11} = D_n(\det A) \Rightarrow OK$

② S.q vrai au rang $n-1$.

Π .q vrai au rang n .

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Donc A inversible et sa 1^{re} colonne non nulle.

Donc $\exists T_1 = I_n + \lambda E_{2,1}$ afin que $T_1 A$ ai le coef (2,1) non nul.

Puis $\exists T_2 = I_n + \mu E_{1,2}$ t.q $T_2 T_1 A$ ai le coef (1,1) égal à 1.

Puis on trouve $B_1, \dots, B_p$ transv. t.q.

$$B_1 \dots B_p T_2 T_1 A = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & \ddots \\ 0 & & 1 & \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$$

Puis, on trouve $B'_1, \dots, B'_q$ trans t.q.:

$$B_1 \dots B_p T_2 T_1 A B'_1 \dots B'_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \alpha \end{bmatrix} = A'$$

On $\det A = \det B$ et $B \in \Pi_{n-1}(\mathbb{K})$.

Utilisons l'hyp. de récurrence:

$\exists C_1, \dots, C_r$ et $C'_1, \dots, C'_s \in \Pi_{n-1}(\mathbb{K})$ t.q $B = C_1 \dots C_r D_{n-1}(\det A) C'_1 \dots C'_s$.

Posons

$$F_i := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & C_i \end{bmatrix} \text{ et } F'_j := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & C'_j \end{bmatrix}$$

On a donc : $A' = F_1 \dots F_r D_n(\det A) F'_1 \dots F'_s$ et

$$A = T_1^{-1} T_2^{-1} B^{-1} \dots B_1^{-1} F_1 \dots F_r D_n(\det A) F'_1 \dots F'_s B_q^{-1} \dots B_1^{-1}$$

CCL OK.

② $A \in SL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \det A = 1$.

Donc, $\forall n, D_n(\det A) = I_n$.

Donc, tout éléments de $SL_n(\mathbb{K})$ est un produit de transvections.

E_{ij} : i-ème j-colonne