

Dev 4

lundi 17 janvier 2022 09:59

Dev n° 4

Ref : Jean Etienne Rombaldi

"Mathématiques par l'agrégation :
Algèbre et géométrie" 672-675
Site : Crépusculaire

Titre : Décomposition de Jordan

Notre but est de démontrer le lemme suivant :

Lemme :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$.

$\exists B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ base de E telle que chaque sous-espace vectoriel $E_k = \text{Vect}(B_k)$ soit stable par u et la matrice de $u|_{E_k}$ est

$$J_k = \begin{bmatrix} 0 & & (0) \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{q_k}(\mathbb{K}) \quad \text{où } q_k = \dim E_k.$$

Par ce fait, démontrons le fait suivant :

Lemme 1 :

$u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent de rang $q \geq 1$.

Alors, $\exists \ell \in E^*$, $x \in E$ t.q. :

- $F = \text{Vect}(x, \dots, u^{q-1}(x))$ de base B_F .

- $G = H^\perp$ avec $H = \text{Vect}(\ell, {}^t u(\ell), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\ell))$ de base B_G .

Sont stable par u et $E = F \oplus G$.

Démo : (Lemme 1)

• On a $({}^t u)^k = {}^t(u^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, donc l'endomorphisme ${}^t u: E^* \rightarrow E^*$ est aussi nilpotent d'ordre q .

Donc, $\exists \ell \in E^*$ tel que la famille $(\ell, {}^t u(\ell), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\ell))$ soit libre.

Comme $\ell = u^{q-1} \neq 0$, $\exists x \in E$ t.q. $\ell(u^{q-1}(x)) \neq 0$ et $u^{q-1}(x) \neq 0$.

Donc $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre.

Notons :

$$H = \text{Vect}(\ell, {}^t u(\ell), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\ell)), \quad F = \text{Vect}(x, \dots, u^{q-1}(x)) \text{ et } G = H^\perp.$$

Comme H est stable par ${}^t u$ (${}^t u(H) \subset H$) alors G est stable par u .

On a F stable par u .

• Montrons que $E = F \oplus G$

→ On remarque que $\dim F = q$ et $\dim G = \dim H^\perp = \dim E - \dim H = n - q$.

Donc $\dim F + \dim G = q + n - q = n = \dim E$.

→ Il reste à montrer que $F \cap G = \{0\}$

Soit $y \in F \cap G$.

$$\text{Comme : } y \in F, \quad y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x).$$

- $u \in G$ alors $u^{q-1}(u) \in G = H^\perp$ (car G stable par u)

Comme: $-y \in F$, $y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k \mu^k(x)$.

$-y \in G$ alors $\mu^{q-1}(y) \in G = H^\perp$ (car G stable par μ)

Ainsi, par orthogonalité on a: $q-1$

$$0 = \mathbb{1}(\mu^{q-1}(y)) = \sum_{k=0}^{q-1} \mathbb{1}(\lambda_k \mu^{k+q-1}(x)) = \lambda_0 \underbrace{\mathbb{1}(\mu^{q-1}(x))}_{\neq 0 \text{ car } \mu^{q-1}(x) \neq 0}$$

Donc $\lambda_0 = 0$.

Par récurrence $\lambda_0 = \dots = \lambda_{q-1} = 0$. ($j \in [0; q-2]$, on a $y = \sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k \mu^k(x)$)

Ainsi $y = 0$.

Donc $F \cap G = \{0\}$.

Donc $E = F \oplus G$. $\square$

Maintenant, prouvons le lemme :

Demo: (Lemme 2)

Procédons par récurrence sur $n = \dim E$.

(I) $n=1$. On a $\mu = 0$ et le résultat acquis.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons le résultat vrai par le rang k à $k \leq n-1$, montrons au rang n .

Considérons F et G comme dans le lemme 1.

Complétons la base B_F par B_G : posons $B = B_F \cup B_G$.

On a alors :

$$\text{Mat}_B(\mu) = \begin{bmatrix} J_q & 0 \\ 0 & A_{n-q} \end{bmatrix}$$

avec $q = \dim F$ et $A_{n-q} \in \mathcal{M}_{n-q}(K)$ la matrice de $\mu|_G$ dans B_G .

• Si $q=n$, c'est fini

• Si $q < n$, on utilise l'hypothèse de récurrence sur $\mu|_G$. $\square$

Annexe:

• $\dim G = n-q$ car $\dim G = \dim H^\perp = \dim E - \dim H = n-q$.

Démo de $\dim H + \dim H^\perp = \dim E$.

$(e_1, \dots, e_q)$ base de H qu'on complète en une base de E $(e_1, \dots, e_n)$.

On prend une base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$

On a $\mathbb{1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \in F^\perp$ ssi $\mathbb{1} \cdot e_j = 0 \quad \forall j \leq q$.
ssi $\mathbb{1} \in \text{Vect}(e_{q+1}^*, \dots, e_n^*)$

Donc $\dim F^\perp = \dim \text{Vect}(e_{q+1}^*, \dots, e_n^*) = n-q$.

• $(x, \mu(x), \dots, \mu^{q-1}(x))$ base.

Démo: Déjà $x, \mu(x), \dots, \mu^{q-1}(x) \neq 0$ donc q éléments.

S.g. $\lambda_1 x + \dots + \lambda_{q-1} \mu^{q-1}(x) = 0$

Alors $\lambda_1 \mu^{q-1}(x) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

Par récurrence les $\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1} = 0$.

Donc la famille forme une base.

• Méthode décomposition de Jordan générale:

• Méthode décomposition de Jordan générale :

Voici une méthode basique pour trouver la réduite de Jordan d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, ainsi qu'une matrice de passage :

- Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A .
- Pour chaque valeur propre λ , calculer le sous-espace propre $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ et trouver une base de E_λ . Le nombre de blocs de Jordan associés à λ est $\dim E_\lambda$.
- Pour chaque vecteur propre de la base de E_λ , on construit le bloc de Jordan associé :
 - Si $v_1 \in E_\lambda$ est un vecteur propre de la base de E_λ , alors on cherche $v_2 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)v_2 = v_1$.
 - Puis on cherche s'il existe $v_3 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)v_3 = v_2$.
 - On arrête le processus lorsqu'il n'y pas de solution.
 - On a $Av_1 = \lambda v_1$, puis $Av_2 = v_1 + \lambda v_2, \dots, Av_p = v_{p-1} + \lambda v_p$.
 - Donc, dans le sous-espace engendré par ces $(v_1, v_2, \dots, v_p)$, la matrice associée à A , dans cette base, est exactement le bloc de Jordan :

$$J(\lambda) = \begin{matrix} & Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_p \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{matrix} & \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- On peut aussi savoir quand s'arrêter en utilisant le fait que le bloc de Jordan est toujours d'une taille p inférieure ou égale à la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique (et même du polynôme minimal).
- On recommence avec v'_1 , un autre vecteur de la base de E_λ : on construit $v'_2, v'_3, \dots$ ce qui conduit à un autre bloc de Jordan pour la valeur λ . On procède ainsi de suite pour tous les vecteurs de la base de E_λ et ensuite bien sûr pour les autres valeurs propres.

• Par aller plus loin on peut voir la décomposition de Frobenius :

Thm :

Soit f un endomorphisme de E , il existe une décomposition $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ en sous espaces stables telle que

1. pour tout i , l'induit f_{F_i} sur F_i est cyclique
2. pour tout i , le polynôme minimal μ_i de f_{F_i} vérifie $\mu_{i+1} | \mu_i$

Lemme:

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$.

$\exists \beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_r$ base de E t.q. $\forall E_k = \text{Vect}(\beta_k)$ soit stable par u et on a:

$$\text{Mat}_{E_k}(u) = J_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{q_k}(\mathbb{K}) \text{ où } q_k = \dim E_k$$

Lemme: (i)

$u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent de rang $q \geq 1$.

Alors, $\exists F \in E^*$, $\exists x \in E$ t.q.:

- $F = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$
 - $G = F^\perp$ avec $H = \text{Vect}(1, {}^t u(1), \dots, ({}^t u)^{q-1}(1))$
- stable par u et $E = F \oplus G$.

Démo: (i)

• Existence et stabilité:

On a $({}^t u)^k = {}^t(u^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ donc ${}^t u : E^* \rightarrow E^*$ est nilpotent d'ordre q .

Donc $\exists 1 \in E^*$ t.q. $(1, {}^t u(1), \dots, ({}^t u)^{q-1}(1))$ soit libre, et donc base de H .

Comme $1 \circ u^{q-1} \neq 0$, $\exists x \in E$ t.q. $1(u^{q-1}(x)) \neq 0$ et $u^{q-1}(x) \neq 0$.

Donc, $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ libre. Et donc une base de F .

Comme H stable par ${}^t u$ alors G stable par u .

On voit directement que F est stable par u .

• M.q. $E = F \oplus G$:

$\rightarrow \dim F + \dim G = q + n - q = q = \dim E$

$\rightarrow$ M.q. $F \cap G = \{0\}$

Soit $y \in F \cap G$.

$$\hookrightarrow y \in F, y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x)$$

$$\hookrightarrow y \in G, u^{q-1}(y) \in G = H^\perp$$

Ainsi,

$$0 = 1(u^{q-1}(y)) = \sum_{k=0}^{q-1} 1(\lambda_k u^{k+q-1}(x)) = \lambda_0 \underbrace{1(u^{q+1}(x))}_{\neq 0}$$

Donc, $\lambda_0 = 0$.

Par récurrence $\lambda_1 = \dots = \lambda_{q-1} = 0$.

Donc $y = 0$

Donc $F \cap G = \{0\}$ $\square$

Démo: (Lemme)

Par récurrence sur $n = \dim E$.

(I) $n=1$. On a $u=0$. Ok

(II) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

S.q. vraie au rang k où $k \leq n-1$.

Montrons au rang n .

Considérons F et G comme dans (i).

Complétons la base β_F par β_G : $\beta = \beta_G \cup \beta_F$.

On a alors,

$$\text{Mat}_\beta(u) = \begin{bmatrix} J_q & \\ & A_{n-q} \end{bmatrix}$$

avec $q = \dim F$ et $A_{n-q} \in \mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{K})$
 $\text{Mat}_{\beta_0}(u|_G)$

• si $q=n$: c'est fini

• si $q < n$: on applique l'hypothèse de récurrence sur $u|_G$ $\square$