

Dev n° 2Titre: Méthode de NewtonThm:

Soit $f: [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fct de classe $\mathcal{C}^2$.

On s.q. $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$, $\forall x \in [c; d]$.

On considère la suite récurrente:

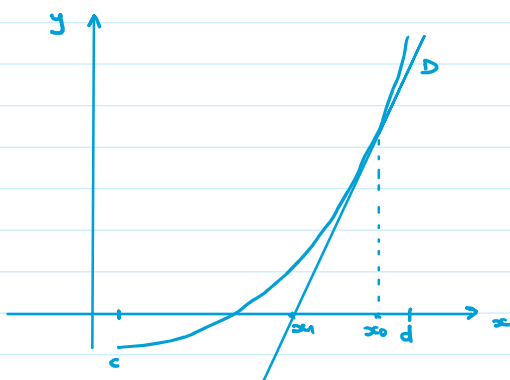
$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n \geq 0 \quad \text{avec} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Alors,

$\exists ! a \in [c; d]$ t.q. $f(a) = 0$ et (x_n) cv en a au moins à l'ordre 2.

De plus, si $f''(a) \neq 0$, la convergence est exactement d'ordre 2 et

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$$



$$f \in \mathcal{C}^2([c; d])$$

$$f' > 0$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\leadsto F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Demo:

* Il y a $\exists ! a \in [c; d]$ t.q. $f(a) = 0$:

La fct f est continue sur $[c; d]$ et croît strict de $f(c) < 0$ à $f(d) > 0$.

Donc, $\exists ! a \in]c; d[$ t.q. $f(a) = 0$.

* Trouvons une expression de $F(x) - a$:

$$\text{On a q. } F(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - 0 = a$$

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \leadsto F'(a) = 1 - \frac{f'(a)^2}{f'(a)^2} = 0$$

Comme $f(a) = 0$ on peut écrire pour $x \in [c; d]$:

$$F(x) - F(a) = F(x) - a$$

$$= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a + \frac{f(a)}{f'(x)}$$

$$= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)}$$

$$= \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)} \quad | \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\begin{aligned}
 & b'(x) \\
 &= \frac{b(a) - b(x) - (a-x)b'(x)}{b'(x)} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{b''(z)}{b'(x)} (x-a)^2
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Taylor à l'ordre 2 d'origine } x \text{ et d'extrémité } a \text{ et } z \text{ entre } a \text{ et } x$$

* 17.9 faibv en a au moins à l'ordre 2:
Posons.

$$C := \frac{\max_{z \in [c,d]} |b''(z)|}{2 \min_{x \in [c,d]} b'(x)}.$$

On a donc :

$$|F(x) - a| \leq C |x-a|^2, \quad x \in [c,d]$$

Soit $\alpha > 0$ assez petit t.q. $C\alpha < 1$ et t.q. l'intervalle $I = [a-\alpha; a+\alpha]$ soit contenu dans $[c,d]$.

Alors, pour $x \in I$ on a :

$$|F(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha.$$

D'où $F(I) \subset I$.

Si $x_0 \in I$ on a donc $x_n \in I \quad \forall n$ et

$$\begin{aligned}
 |x_{n+1} - a| &= |F(x_n) - a| \leq C |x_n - a|^2 \\
 \text{récurrent} \Rightarrow C |x_n - a| &\leq (C |x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}
 \end{aligned}$$

On en déduit que x_n cv vers a à l'ordre au moins 2 car $C\alpha < 1$.

* 17.9 si $b''(x) > 0$ alors la cv est d'ordre 2:

La dérivée b' est ici croissante, et b est une fct convexe sur $]c; d[$.

• Par $a \leq x \leq d$ on a $b'(x) > 0$ et $b(x) \geq 0$, d'où :

$$F(x) = x - \underbrace{\frac{b(x)}{b'(x)}}_{>0} \leq x$$

D'autre part, si $x \rightarrow a$:

$$F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{b''(z)}{b'(x)} (x-a)^2 > 0$$

Cela montre que $]a; d[$ est stable par F .

On a donc $\forall x_0 \in]a; d[$, $x_n \in]a; d[$.

Donc, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

La suite (x_n) admet donc une limite ℓ qui vérifie $F(\ell) = \ell$ donc $b(\ell) = 0$ et ℓ ne peut être que a .

La cv de x_n vers a est quadratique car :

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2.$$

• Si $x_0 = a$ on a une suite cst.

• Si $x_0 < a$ on a $x_1 \in]a; d[$ et on revient à notre étude.

* Équivalence en ta de $x_{n+1} - a$:

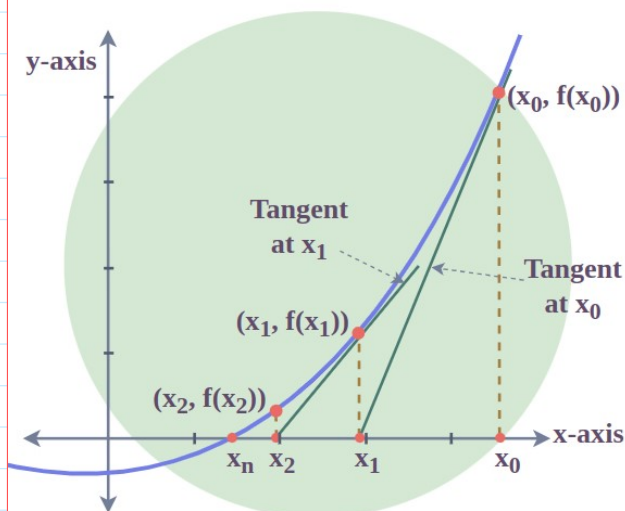
Si $a < x_0 \leq d$ on a $x_n > a \quad \forall n$ et

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2} \frac{b''(z_n)}{b'(x_n)}.$$

Et d'après le 1^{er} * on a $a < z_n < x_n$.

La fraction tend donc vers $b''(a)/2b'(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Annexe :



- En pratique:

En pratique, on ne sait pas vérifier les hypothèses du thm puis qu'on cherche p .
En pratique, on choisit x_0 "proche" de p avec une méthode de dichotomie.

- Convergence quadratique:

→ le nombre de chiffres significatifs corrects "double" à chaque itération

- Critère d'arrêt:

- Résidu: $|f(x_n)| < \epsilon$?

- Incrément: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ problème si la suite qui cv très lentement ou même diverge très lentement
(ex: $S_n = \sum_{k=1}^n 1/k$)

Mais ici, la cv quadratique implique que: $\frac{|x_{n+1} - p|}{|x_n - p|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Donc, $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_n - p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Donc, $|x_{n+1} - x_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |x_n - p|$ critère d'incrément OK pour Newton.

- En dimension supérieur: Newton - Raphson

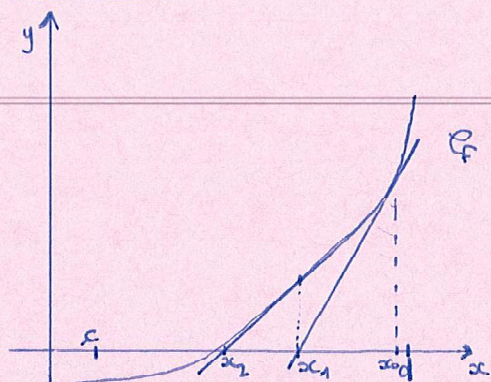
(*) $\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n - (Df(x_n))^{-1} f(x_n) \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$

Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ (U ouvert de $\mathbb{R}^d$) est $\mathcal{C}^2$ et $x^* \in U$ t.q. $f(x^*) = 0$.

Si $Df(x^*)$ inversible alors $\exists r > 0$ t.q. $\forall x_0 \in B(x^*, r)$, la suite $(x_n)_n$ est bien définie par (*), reste dans la boule et cv quadratiquement vers x^* .

$\exists c \in]0, 1[$, $\|x_{n+1} - x^*\| \leq c \|x_n - x^*\|^2$

Illustration:



$$f \in \mathcal{C}^2([c, d])$$

$$f' > 0$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\leadsto F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

D'où $F(I) \subset I$.

Si $x_0 \in I$, on a donc $x_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}$, et

$$|x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C |x_n - a|^2$$

$$\stackrel{\text{réc.}}{\Rightarrow} C |x_n - a| \leq (C |x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}$$

Donc, x_n cv au moins à l'ordre 2.

• Cas f convexe:

Ici $f' \nearrow$ et $f'' > 0$ sur $]c, d[$.

Pour $x \in [a, d]$, on a:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x.$$

Et si $x > a$:

$$F(x) - a = \frac{f''(z)(x-a)^2}{2 f'(x)} > 0.$$

Donc, $F([a, d]) \subset]a, d]$ et $\forall x_0 \in]a, d], x_n \in]a, d], \forall n$.

Et (x_n) est décroissante et minorée $\Rightarrow$ cv vers p .

On a $F(p) = p$ et $F(p) = 0 \stackrel{\text{unicité}}{\Rightarrow} p = a$.

• Équivalent:

Si $a < x \leq d$ on a $x_n > a$ et

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \quad \text{et } a \leq z_n \leq x_n$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f''(a)}{f'(a)}$$

D'où l'équivalence $\square$

Démo:

• P. q. $\exists! a \in [c, d]$ t. q. $f(a) = 0$:

$f \in \mathcal{C}^0([c, d])$ et $f \nearrow \nearrow$ de $f(c) < 0$ à $f(d) > 0$.

Donc, $\exists! a$ t. q. $f(a) = 0$.

• Calcul $F(x) - a$:

$$F(x) - a = x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)}$$

$$= \frac{(x-a)f'(x) - f(x) + f(a)}{f'(x)}$$

$$= \frac{f''(z)(x-a)^2}{2 f'(x)}$$

Taylor ordre 2
et z entre a et x

• P. q. (x_n) cv en a au moins à l'ordre 2:

$$\text{Posons: } C := \frac{\max_{z \in [c, d]} |f''(z)|}{2 \min_{x \in [c, d]} |f'(x)|}$$

Pour $x \in [c, d]$ on a:

$$|F(x) - a| \leq C |x - a|^2$$

Soit $\alpha > 0$ assez petit t. q. $C\alpha < 1$ et t. q. $I = [a - \alpha; a + \alpha] \subset [c, d]$

Alors, $\forall x \in I$, on a:

$$|F(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha.$$