

Développement : Déterminant de GRAM et applications

ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE
ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [GX] GOURDON X., *Les maths en tête - Algèbre*, 2^{ème} édition, ellipses, 2009, p263.

Pour la première application : pas de référence (l'énoncé est juste avant le premier théorème).

Pour la deuxième application : p268.

Pour les leçons :

- 149 : Déterminant. Exemples et applications.
- 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.
- 191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.
- 213 : Espaces de HILBERT. Exemples d'applications.
- 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Selon les leçons, on préférera présenter une application plutôt qu'une autre.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$ -espace préhilbertien ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Définition 1. Matrices et déterminants de GRAM.

Soient $x_1, \dots, x_n \in E$.

On appelle *matrice de GRAM* de $x_1, \dots, x_n$ la matrice $\Gamma(x_1, \dots, x_n) := (\langle x_i | x_j \rangle)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}$.

On appelle *déterminant de GRAM* de $x_1, \dots, x_n$ le déterminant de $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$, noté $G(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque 2.

Si $x_1, \dots, x_n$ n'est pas libre, les colonnes de $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ non plus (par linéarité du produit scalaire) donc $G(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Pour la même raison, dans l'autre sens, si la famille est libre (il faudrait faire quelques calculs pour le montrer), $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Théorème 3.

Soient $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ une famille libre et $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}.$$

PREUVE : Soit $x \in E$. Soit $y \in F$ son projeté orthogonal sur F , de sorte que $d(x, F) = \|x - y\|$. On a donc $x - y \in F^\perp$ (car comme F est de dimension finie, $x = y + z$ avec $z = x - y \in F^\perp$).

En particulier, $x - y$ et y sont orthogonaux. D'après le théorème de PYTHAGORE, $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2$.

Maintenant, on a (par blocs) :

$$\begin{aligned}
 G(e_1, \dots, e_n, x) &= \begin{vmatrix} & & \langle e_1 | x \rangle \\ & \Gamma(e_1, \dots, e_n) & \vdots \\ \langle e_1 | x \rangle & \cdots & \langle e_n | x \rangle & \langle x | x \rangle \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} & & \langle e_1 | x - y + y \rangle \\ & \Gamma(e_1, \dots, e_n) & \vdots \\ \langle e_1 | x - y + y \rangle & \cdots & \langle e_n | x - y + y \rangle & \|x\|^2 + \|x - y\|^2 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{x-y \in F^\perp}{=} \begin{vmatrix} & & \langle e_1 | y \rangle \\ & \Gamma(e_1, \dots, e_n) & \vdots \\ \langle e_1 | y \rangle & \cdots & \langle e_n | y \rangle & \|x\|^2 + \|x - y\|^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} & & \langle e_1 | y \rangle \\ & \Gamma(e_1, \dots, e_n) & \vdots \\ \langle e_1 | y \rangle & \cdots & \langle e_n | y \rangle & \|x\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & 0 \\ & \Gamma(e_1, \dots, e_n) & \vdots \\ \langle e_1 | y \rangle & \cdots & \langle e_n | y \rangle & \|x - y\|^2 \end{vmatrix} \\
 &= \det(P) + \det(Q),
 \end{aligned}$$

en notant P et Q les matrices correspondantes dans l'ordre dans l'égalité précédente.

Or, $y \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, donc $\det(P) = G(e_1, \dots, e_n, y) = 0$.

Un calcul par blocs donne également $\det(Q) = \|x - y\|^2 G(e_1, \dots, e_n)$.

Par conséquent, $G(e_1, \dots, e_n, x) = \|x - y\|^2 G(e_1, \dots, e_n)$, c'est-à-dire $d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$ (puisque $e_1, \dots, e_n$ est libre, et donc que $G(e_1, \dots, e_n) \neq 0$). $\square$

Application 4. Inégalités d'HADAMARD.

On a les inégalités suivantes :

$$[1] \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad G(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2 ;$$

$$[2] \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n \quad |\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|_2.$$

De plus, pour ces deux inégalités, on a égalité si, et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale.

PREUVE : [1] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété "Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad G(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2$, avec égalité si, et seulement si $x_1, \dots, x_n$ est orthogonale".

Montrons-la par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

* Initialisation : Si $n = 1$, $G(x_1) = \|x_1\|^2 = \prod_{k=1}^1 \|x_k\|^2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$. Distinguons deux cas :

→ Si $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée, d'après la remarque précédente, $G(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$, donc l'inégalité est vérifiée.

→ Si $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est libre, soit $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. D'après le théorème précédent, on a :

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_{n+1}) &= G(x_1, \dots, x_n) d(x_{n+1}, F)^2 \\ &\stackrel{\mathcal{P}(n)}{\leq} d(x_{n+1}, F)^2 \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\leq \|x_{n+1}\|^2 \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2, \quad (2)$$

d'après le théorème de PYTHAGORE qui donne, si y_{n+1} est la projection orthogonale de x_{n+1} sur F :

$$\|x_{n+1}\|^2 = \|y_{n+1}\|^2 + d(x_{n+1}, F)^2.$$

Cela prouve l'inégalité souhaitée.

Maintenant, (1) est une égalité si, et seulement si $G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2$. D'après $\mathcal{P}(n)$, c'est le cas si, et seulement si $x_1, \dots, x_n$ est orthogonale.

Enfin, (2) est une égalité si, et seulement si $y_{n+1} = 0$. Comme $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, c'est le cas si, et seulement si $x_{n+1} \in F^\perp$.

On a le cas d'égalité dans $\mathcal{P}(n+1)$ si, et seulement si (1) et (2) sont satisfaites, i.e. si, et seulement si $x_1, \dots, x_{n+1}$ est libre.

[2] Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$. On munit $\mathbb{K}^n$ du produit scalaire (ou hermitien) $\langle \cdot | \cdot \rangle : (u, v) \mapsto \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k}$, de norme

associée $\|\cdot\|_2$. On pose $M := (x_1 | \dots | x_n)$ (colonnes).

En appliquant le point précédent, en remarquant que $\Gamma(x_1, \dots, x_n) = {}^t M \bar{M}$, on a :

$$|\det(M)|^2 \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|_2^2,$$

ce qui conclut la preuve par passage à la racine carrée. Le cas d'égalité provient directement du premier point. $\square$

Remarque 5.

Ce corollaire n'est pas démontré comme cela dans la référence. Il faut donc savoir le faire sans référence (mais il n'y a pas de difficulté particulière, de mon point de vue).

La deuxième inégalité de HADAMARD a une interprétation géométrique : $\det(x_1, \dots, x_n)$ correspond au volume (algébrique) du parallélotope (i.e. parallélogramme en dimension $n \geq 3$) engendré par $x_1, \dots, x_n$. Le volume maximal en module est donc atteint quand les angles sont droits, lorsque les côtés sont de longueurs données.

Lemme 6. Déterminants de CAUCHY.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $a_i + b_j \neq 0$.

On pose $\Delta_n = \det \left(\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} \right)$. Alors, $\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$.

PREUVE : Une preuve se trouve dans [GX] page 143-144. Elle n'est pas détaillée ici (ce n'est pas le coeur du sujet). $\square$

Application 7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(a_1, \dots, a_n) = \int_0^1 (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx.$$

Alors, φ admet un minimum $\mu = \frac{1}{(n+1)^2}$, atteint en un unique point de $\mathbb{R}^n$.

PREUVE : Soit $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall f, g \in E \quad \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

et notons $\| \cdot \|_2$ la norme associée.

Pour $i \in \mathbb{N}$, notons $e_i : x \mapsto x^i$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $E_n = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$. On remarque que pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(a_1, \dots, a_n) = \|1 - P\|_2^2$, où $P = -\sum_{i=1}^n a_i e_i \in E_n$.

On cherche à calculer $\mu = \inf_{a \in \mathbb{R}^n} \varphi(a) = \inf_{P \in E_n} \|1 - P\|_2^2 = d(1, E_n)^2$.

Comme E_n est un espace vectoriel de dimension finie, il existe $P_0 \in E_n$ unique tel que $d(1, E_n) = \|1 - P_0\|$. φ admet donc un minimum atteint en un unique point de $\mathbb{R}^n$.

Ensuite, le théorème fournit $\mu = \frac{G(e_0, \dots, e_n)}{G(e_1, \dots, e_n)}$.

Pour tout $i, j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\langle e_i | e_j \rangle = \frac{1}{i+j+1}$ (calcul intégral simple). Donc $G(e_1, \dots, e_n) = \det \left(\frac{1}{i+j+1} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}$ et

$$G(e_0, \dots, e_n) = \det \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}.$$

Ces déterminants sont des déterminants de CAUCHY. On a donc :

$$G(e_0, \dots, e_n) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (i-j)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (i+j-1)^2} \quad \text{et} \quad G(e_1, \dots, e_n) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (i-j)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (i+j+1)^2}.$$

Par conséquent, puisque $\prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (i+j-1)^2 = \prod_{0 \leq i, j \leq n} (i+j+1)^2$ (par deux décalages d'indices) :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (i-j)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (i+j-1)^2} \times \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (i+j+1)^2}{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (i-j)^2} \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (i+j+1)^2}{\prod_{0 \leq i, j \leq n} (i+j+1)^2} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n (i - (n+1))^2}{((n+1)!)^2} \\ &= \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. $\square$