

Développement : Théorème de DANKIN

ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [HU] J-B. HIRIART-URRUTY, *Mathematical Tapas*, Volume 2, Springer, 2017, p215-218.

Pour les leçons :

- 203 : Utilisation de la notion de compacité.
- 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
- 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
- 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Soient $N, M \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 1. de DANKIN.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$, et soit $K \subset \mathbb{R}^M$ un fermé non vide.

On se donne une fonction $\phi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad f(x) = \max_{y \in K} \phi(x, y).$$

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad Z(x) = \{y \in K \mid f(x) = \phi(x, y)\}.$$

On suppose qu'il existe un voisinage V (ouvert) de x_0 tel que :

(1) Z n'est pas vide sur V ;

(2) $\bigcup_{y \in V} Z(x)$ est borné ;

(3) Les gradients "partiels" $\nabla_x \phi$ par rapport aux N premières variables de ϕ existent sur $V \times K$;

(4) La fonction $(x, y) \mapsto \nabla_x \phi(x, y)$ est continue sur $V \times K$.

Alors :

(1) $Z(x_0)$ est non vide ;

(2) f est bien définie et différentiable au sens de GATEAUX sur un voisinage de x_0 , et sa dérivée directionnelle en x_0 dans la direction $h \in \mathbb{R}^N$ s'écrit :

$$\mathcal{D}_h f(x_0) = \max_{y \in Z(x_0)} \mathcal{D}_h \phi(x_0, y).$$

En particulier, si le maximum de $\phi(x_0, \cdot)$ est atteint en un unique point y_0 (i.e. $Z(x_0)$ est un singleton), alors :

$$\mathcal{D}_h f(x_0) = \mathcal{D}_h \phi(x_0, y_0).$$

PREUVE : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers zéro. Soit $h \in \mathbb{R}^N$. Quitte à raisonner à partir d'un certain rang, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[x_0; x_0 + u_n h] \subset V$.

★ ÉTAPE 1 : Montrons deux inégalités concernant $\mathcal{D}_h \phi$.

→ D'une part, soit $y_0 \in Z(x_0)$. On a $f(x_0) = \phi(x_0, y_0)$, donc par définition de f , pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x_0 + u_n h) - f(x_0) \geq \phi(x_0 + u_n h, y_0) - \phi(x_0, y_0).$$

Donc :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + u_n h) - f(x_0)}{u_n} &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi(x_0 + u_n h, y_0) - \phi(x_0, y_0)}{u_n} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi(x_0 + u_n h, y_0) - \phi(x_0, y_0)}{u_n} = \mathcal{D}_h \phi(x_0, y_0), \end{aligned}$$

puisque ϕ admet une dérivée directionnelle $\mathcal{D}_h \phi(x_0, y_0)$ par hypothèse. Ainsi :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + u_n h) - f(x_0)}{u_n} \geq \sup_{y_0 \in Z(x_0)} \mathcal{D}_h \phi(x_0, y_0).$$

→ D'autre part, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $y_n \in Z(x_0 + u_n h)$. On a $f(x_0 + u_n h) = \phi(x_0 + u_n h, y_n)$, et donc par définition de f :

$$f(x_0 + u_n h) - f(x_0) \leq \phi(x_0 + u_n h, y_n) - \phi(x_0, y_n).$$

La fonction $\phi(\cdot, y_n)$ est différentiable sur V ouvert et $[x_0; x_0 + u_n h] \subset V$. D'après le Théorème des accroissements finis, il existe $\tilde{x}_n \in]x_0; x_0 + u_n h[$ tel que :

$$\begin{aligned} \phi(x_0 + u_n h, y_n) - \phi(x_0, y_n) &= d\phi(\tilde{x}_n, y_n) \cdot (u_n h) \\ &= u_n d\phi(\tilde{x}_n, y_n) \cdot h \\ &= u_n \mathcal{D}_h \phi(\tilde{x}_n, y_n). \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{f(x_0 + u_n h) - f(x_0)}{u_n} \leq \frac{\phi(x_0 + u_n h, y_n) - \phi(x_0, y_n)}{u_n} \leq \mathcal{D}_h \phi(\widetilde{x}_n, y_n).$$

★ **ÉTAPE 2 :** Soient $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in V$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $w_k \in Z(x_k)$ tel que $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $w \in K$. Montrons que $w \in Z(x)$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) && (\text{car } f \text{ est continue en } x \text{ et } x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(x_k, w_k) && (\text{car } w_k \in Z(x_k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}) \\ &= \phi(x, w) && (\text{car } x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x, w_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} w \text{ et } \phi \text{ est continue en } (x, w)). \end{aligned}$$

Donc $w \in Z(x)$.

★ **ÉTAPE 3 :** Passons à la limite les inégalités de l'ÉTAPE 1.

Déjà, on a $x_0 + u_n h \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_0$ (notons également que comme $x_0 \leq \widetilde{x}_n \leq x_0 + u_n h$, on a $\widetilde{x}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_0$).

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, puisque $x_0 + u_n h \in V$, $y_n \in \bigcup_{x \in V} Z(x)$. Comme ce dernier ensemble est borné, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une

suite bornée de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^N$. D'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, on peut en extraire une sous-suite convergente. Quitte à considérer celle-ci, on peut donc supposer que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $y_0 \in K$, et on a vu que $y_n \in Z(x_0 + u_n h)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après l'ÉTAPE 2, on a $y_0 \in Z(x_0)$. On peut donc appliquer l'estimation écrite dans l'ÉTAPE 1 :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + u_n h) - f(x_0)}{u_n} \geq \mathcal{D}_h \phi(x_0, y_0).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu dans l'ÉTAPE 1 que :

$$\frac{f(x_0 + u_n h) - f(x_0)}{u_n} \leq \mathcal{D}_h \phi(\widetilde{x}_n, y_n).$$

Par passage à la limite supérieure, par continuité de $\mathcal{D}_h \phi$ et comme $\widetilde{x}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_0$:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + u_n h) - f(x_0)}{u_n} &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{D}_h \phi(\widetilde{x}_n, y_n) \\ &\leq \mathcal{D}_h \phi(x_0, y_0). \end{aligned}$$

On a montré cette inégalité pour un élément $y \in K$. Par passage au sup,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + u_n h) - f(x_0)}{u_n} \leq \sup_{y_0 \in Z(x_0)} \mathcal{D}_h \phi(x_0, y_0).$$

On a montré que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + u_n h) - f(x_0)}{u_n} \leq \sup_{y_0 \in Z(x_0)} \mathcal{D}_h \phi(x_0, y_0) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + u_n h) - f(x_0)}{u_n},$$

ce qui implique que f est différentiable en x_0 dans la direction h et :

$$\sup_{y_0 \in Z(x_0)} \mathcal{D}_h \phi(x_0, y_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + u_n h) - f(x_0)}{u_n} = \mathcal{D}_h f(x_0).$$

$Z(x_0)$ étant un compact (inclus dans $\mathbb{R}^M$, fermé par continuité de ϕ et bornée par hypothèse), cela achève la démonstration. $\square$

Voici un exemple d'application directe du théorème sur un cas "simple" :

Définition 1. Distance signée.

Soit Ω un ouvert borné. On appelle *distance signée* sur $\partial\Omega$ la fonction

$$d : x \mapsto \begin{cases} \text{dist}(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega} \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \\ -\text{dist}(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in \Omega \end{cases},$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\text{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} \|x - y\|$, avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$.

Application 2.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier. Soit d la distance signée sur Ω . Alors, d^2 est différentiable sur $\mathbb{R}^N$ et :

$$\mathcal{D}_h(d^2)(x) = 2 \inf_{p(x) \in Z(x)} (x - p(x))h.$$

PREUVE : On prend $F = \partial\Omega$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}^N$,

$$Z(x) = \{y \in \partial\Omega \mid d(x) = \|x - y\|\}.$$

En fait, Z est l'ensemble des projetés (orthogonaux) du point x sur $\partial\Omega$.

(1) Si $x \in \mathbb{R}^N$, on sait que $y \mapsto \|x - y\|$ est continue sur $\partial\Omega$ qui est un compact, et donc elle admet un minimum sur $\partial\Omega$. Cela signifie que $Z(x)$ n'est pas vide.

(2) Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et pour tout voisinage V de x_0 , $\bigcup_{x \in V} Z(x) \subset \partial\Omega$ qui est un compact donc borné.

(3) Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on a $-d(x)^2 = \sup_{y \in \partial\Omega} (-\|x - y\|^2)$.

Soit $\phi : (x, y) \mapsto -\|x - y\|^2$. ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (fonction polynomiale) et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^N \quad \nabla_x \phi(x, y) = -2(x - y).$$

(4) En tant que fonction polynomiale, $\nabla_x \phi$ est continue sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

D'après le théorème de DANKIN, pour tout $h \in \mathbb{R}^N$, $-d^2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^N$ dans la direction h et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad -\mathcal{D}_h(d^2)(x) = \sup_{p(x) \in Z(x)} \nabla_x \phi(x, p(x)) \cdot h.$$

Autrement dit,

$$\mathcal{D}_h(d^2)(x) = 2 \inf_{p(x) \in Z(x)} (x - p(x))h.$$

□