

Développement : Théorème de FLOQUET

ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE
ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [ED] BERTHELIN F., *Équations différentielles*, Cassini, 2027, p304.

Pour les leçons :

- 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.
- 155 : Exponentielle de matrices. Applications.
- 220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.
- 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 1. de FLOQUET.

Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue et T -périodique, où $T > 0$.

Soit $(Y_1, \dots, Y_n)$ une base de solutions du système différentiel $(\mathcal{H}) : X'(t) = A(t)X(t)$. On note $M = (Y_1 | \dots | Y_n)$.

Alors, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M(t+T) = M(t)e^{TB},$$

et pour cette matrice B , il existe $Q : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ T -périodique telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M(t) = Q(t)e^{tB}.$$

Cette dernière identité est appelée *forme normale de FLOQUET*.

PREUVE : Raisonnons par étapes.

★ ÉTAPE 1 : Montrons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et une solution non nulle Y de $(\mathcal{H})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t+T) = \lambda Y(t)$.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$. On sait que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de dimension n .

Soit $L : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ l'endomorphisme défini par :

$$\forall Y \in \mathcal{S} \quad L(Y) = t \mapsto Y(t+T).$$

L est bien à valeurs dans $\mathcal{S}$. En effet, soit $Y \in \mathcal{S}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} Y(t+T) &= A(t+T)Y(t+T) \\ &= A(t)Y(t+T), \end{aligned}$$

puisque $Y \in \mathcal{S}$ et A est T -périodique. Donc L est bien à valeurs dans $\mathcal{S}$, et est linéaire car $(\mathcal{H})$ est un système différentiel linéaire.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(L)$. Remarquons que 0 n'est pas valeur propre de L , puisque L est un automorphisme de $\mathcal{S}$ (sa réciproque étant $Y \mapsto (t \mapsto Y(t-T))$). Il vient alors $\lambda \neq 0$.

Il existe donc un vecteur propre de L , noté Y (qui est une solution de $(\mathcal{H})$) tel que $L(Y) = \lambda Y$. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t+T) = \lambda Y(t)$.

★ ÉTAPE 2 : Montrons que $\varphi : M(t)^{-1}M(t+T)$ est constante sur $\mathbb{R}$. Déjà, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est inversible car M est la matrice dont les colonnes forment une base de solutions de $(\mathcal{H})$.

Donc $t \mapsto M(t)^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi'(t) = -M(t)^{-1}M'(t)M(t)^{-1}M(t+T) + M(t)^{-1}M'(t+T).$$

Or, pour $t \in \mathbb{R}$, $M'(t) = (Y_1'(t) | \dots | Y_n'(t)) = (A(t)Y_1(t) | \dots | A(t)Y_n(t)) = A(t)M(t)$, et comme A est T -périodique, on a de même $M'(t+T) = A(t)M(t+T)$. Il vient :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -M(t)^{-1}A(t)M(t)M(t)^{-1}M(t+T) + M(t)^{-1}A(t)M(t+T) \\ &= -M(t)^{-1}A(t)M(t+T) + M(t)^{-1}A(t)M(t+T) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc φ est constante sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant connexe).

★ ÉTAPE 3 : Montrons l'existence de B . On a que φ est constante sur $\mathbb{R}$, donc il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t)^{-1}M(t+T) = C \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, i.e. $M(t+T) = M(t)C$.

Or, $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective. Il existe donc $\tilde{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C = e^{\tilde{B}}$. En posant $B = \frac{\tilde{B}}{T}$, on obtient

$C = e^{TB}$, ce qui achève cette étape.

★ ÉTAPE 4 : Concluons.

Soit $Q : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Q(t) = M(t)e^{-tB}.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, $Q(t)$ est bien inversible par produit de matrices inversibles. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 Q(t+T) &= M(t+T)e^{-(t+T)B} \\
 &\stackrel{\text{ÉTAPE 3}}{=} M(t)e^{TB}e^{-TB-tB} \\
 &\stackrel{-tB \text{ et } -TB \text{ commutent}}{=} M(t)e^{TB}e^{-TB}e^{-tB} \\
 &= M(t)e^{-tB} \\
 &= Q(t).
 \end{aligned}$$

Donc Q est T -périodique. □

Remarque 2.

Les valeurs propres de e^{TB} sont appelées *multiplicateurs de FLOQUET* du problème.

- S'ils sont tous de module strictement supérieur à 1, aucune solution n'est stable à part la fonction nulle.
- Si un d'entre eux a un module inférieur ou égal à 1, il existe des solutions stables non nulles.
- S'ils sont tous de module inférieur ou égal à 1, toutes les solutions sont stables.

Corollaire 3.

On garde les mêmes notations. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de B . On écrit $B = D + N$ la décomposition de DUNFORD de B , et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Delta := P^{-1}DP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On note également $Z : t \mapsto M(t)P = (Z_1(t) | \dots | Z_n(t))$.

Enfin, pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $\frac{1}{i!}Q(t)N^iP := (R_{i,1}(t) | \dots | R_{i,n}(t))$.

Alors :

[1] $(Z_1, \dots, Z_n)$ est une base de solutions de $(\mathcal{H})$;

[2] Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $t \in \mathbb{R}$, $Z_k(t) = e^{\lambda_k t} \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_{i,k}(t)$, et les $R_{i,k}$ sont toutes T -périodiques.

PREUVE : [1] Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
 Z'_k(t) &= Y'_k(t)P \\
 &= A(t)Y_k(t)P \\
 &= A(t)Z_k(t),
 \end{aligned}$$

et Z_k est une solution de $\mathcal{S}$.

De plus, $(Z_1, \dots, Z_n) = (Y_1P, \dots, Y_nP)$ est $\mathbb{C}$ -libre puisque $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une base de $\mathcal{S}$. Elle est également génératrice de $\mathcal{S}$ car $\mathcal{S}$ est de dimension $n = \text{card}(\{Z_1, \dots, Z_n\})$. Donc c'est une base de $\mathcal{S}$.

[2] Soit $t \in \mathbb{R}$. On a, puisque D et N commutent (ce sont des polynômes en B) :

$$\begin{aligned}
 M(t) &= Q(t)e^{tB} \\
 &= Q(t)e^{t(D+N)} \\
 &= Q(t)e^{tN}e^{tP\Delta P^{-1}} \\
 &= Q(t)e^{tN}Pe^{t\Delta}P^{-1}.
 \end{aligned}$$

Donc $M(t)P = Q(t)e^{tN}Pe^{t\Delta}$. Or, comme $t\Delta = \text{diag}(t\lambda_1, \dots, t\lambda_n)$, $e^{t\Delta} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$. Comme N est nilpotente,

$N^n = 0$ et donc $e^{tN} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i N^i}{i!}$. Ceci permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 Z(t) &= M(t)P \\
 &= Q(t)e^{tN}Pe^{t\Delta} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} t^i \frac{Q(t)N^iP}{i!} e^{t\Delta} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} t^i (R_{i,1}(t) | \dots | R_{i,n}(t)) \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} t^i (R_{i,1}(t)e^{t\lambda_1} | \dots | R_{i,n}(t)e^{t\lambda_n}).
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad Z_k(t) = e^{\lambda_k t} \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_{i,k}(t).$$

Enfin, pour $t \in \mathbb{R}$ et $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$,

$$(R_{i,1}(t+T) - R_{i,1}(t)) \cdots (R_{i,n}(t+T) - R_{i,n}(t)) = \frac{1}{i!} (Q(t+T) - Q(t)) N^i P = 0,$$

car Q est T -périodique. Donc pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $R_{i,k}$ est T -périodique. $\square$

Application 4.

$$\text{Application au système différentiel } (\mathcal{H}) \begin{cases} x'(t) &= x(t) - \cos(t)y(t) \\ y'(t) &= \cos(t)x(t) + y(t) \end{cases}.$$

PREUVE : $(\mathcal{H})$ se réécrit $X'(t) = A(t)X(t)$, où $A : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\cos(t) \\ \cos(t) & 1 \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

A est continue (car ses fonctions coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le sont) et 2π -périodique.

D'après le théorème de FLOQUET, toute matrice dont les colonnes forment une base de solutions fondamentales de $(\mathcal{H})$ admet une forme normale de FLOQUET.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ une solution de $(\mathcal{H})$. On pose $z = x + iy$. z est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z'(t) &= x(t) - \cos(t)y(t) + i\cos(t)x(t) + iy(t) \\ &= (1 + i\cos(t))x(t) + i(1 + i\cos(t))y(t) \\ &= (1 + i\cos(t))z(t). \end{aligned}$$

Il existe donc $\gamma = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ (indépendante de t , avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) telle que :

$$\begin{aligned} z(t) &= \gamma e^{t+i\sin(t)} \\ &= e^t(\alpha + i\beta)(\cos(\sin(t)) + i\sin(\sin(t))) \\ &= e^t(\alpha \cos(\sin(t)) - \beta \sin(\sin(t)) + i(\beta \cos(\sin(t)) + \alpha \sin(\sin(t)))). \end{aligned}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires :

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} \alpha \cos(\sin(t)) - \beta \sin(\sin(t)) \\ \alpha \sin(\sin(t)) + \beta \cos(\sin(t)) \end{pmatrix}$$

et $M : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} \cos(\sin(t)) & \sin(\sin(t)) \\ \sin(\sin(t)) & \cos(\sin(t)) \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale de $(\mathcal{H})$. Sa forme normale de FLOQUET est

donnée par $B = I_2$ et $Q : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\sin(t)) & \sin(\sin(t)) \\ \sin(\sin(t)) & \cos(\sin(t)) \end{pmatrix}$.

Remarque 5.

Dans cet exemple, $T = 2\pi$ et $e^{TB} = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ 0 & e^{2\pi} \end{pmatrix}$. Le problème a un unique multiplicateur de FLOQUET, qui est $e^{2\pi}$, avec $|e^{2\pi}| = e^{2\pi} > e^0 = 1$, donc la seule solution stable est la fonction nulle. $\square$