

Développement : Inégalité de Hoeffding et une application

ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [OUV] OUVARD J., *Master agrégation - Probabilités 2*, Cassini, 2009, p127.

Pour les leçons :

- 244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.
- 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.
- 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.
- 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Lemme 1.

Soit X une variable aléatoire réelle centrée $\mathbb{P}$ -presque sûrement bornée par 1. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

PREUVE : Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{2}(1-x) \leq 1,$$

$$0 \leq \frac{1}{2}(1+x) \leq 1$$

et :

$$\frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) = 1.$$

De plus, $tx = \frac{1}{2}(1-x)(-t) + \frac{1}{2}(1+x)t$.

La fonction $x \mapsto e^{tx}$ est convexe sur $[-1; 1]$, donc pour tout $x \in [-1; 1]$:

$$\begin{aligned} e^{tx} &= e^{\frac{1}{2}(1-x)(-t) + \frac{1}{2}(1+x)t} \\ &\leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^t. \end{aligned}$$

Ensuite, comme X est bornée presque sûrement, e^{tX} aussi. Elle a donc une espérance. En outre, grâce au travail précédent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tX}) &\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(1-X)e^{-t} + \frac{1}{2}\mathbb{E}(1+X)e^t \\ &\stackrel{\mathbb{E}(X)=0}{\leq} \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^t}{2} \\ &\leq \text{ch}(t). \end{aligned}$$

Or, on a $\text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n!2^n = 2 \times 4 \times \cdots \times 2n \leq (2n)!,$$

et donc, comme $t^{2n} \geq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{t^{2n}}{n!2^n} = \frac{(t^2/2)^n}{n!},$$

ce qui donne, en sommant pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Cela achève la preuve. □

Théorème 2. Inégalité de Hoeffding.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes centrées, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n > 0$ tel que $|X_n| \leq c_n$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}}.$$

PREUVE : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $\frac{X_k}{c_k}$ est presque sûrement bornée par 1, et centrée (puisque X_k l'est). D'après le lemme précédent appliqué au réel $t' = tc_k$:

$$\mathbb{E} \left(e^{t' \frac{X_k}{c_k}} \right) \leq e^{\frac{t'^2}{2}},$$

et donc :

$$\mathbb{E}(e^{tX_k}) \leq e^{\frac{t^2}{2} c_k^2}.$$

Comme les X_k sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, les e^{tX_k} sont également indépendantes. Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tS_n}) &= \mathbb{E} \left(e^{\sum_{k=1}^n tX_k} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^n e^{tX_k} \right) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_k}) \\ &\leq \prod_{k=1}^n e^{\frac{t^2}{2} c_k^2} \\ &\leq e^{\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Maintenant, soient $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. $x \mapsto e^{tx}$ est strictement croissante, donc $[S_n > \varepsilon] = [e^{tS_n} > e^{t\varepsilon}]$. e^{tS_n} est une variable aléatoire strictement positive, et $e^{t\varepsilon} > 0$. D'après l'inégalité de MARKOV :

$$\mathbb{P}(e^{tS_n} > e^{t\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{t\varepsilon}}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{t\varepsilon}} \stackrel{(1)}{\leq} e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2}.$$

Posons $a = \sum_{k=1}^n c_k^2$. La fonction $t \mapsto a\frac{t^2}{2} - t\varepsilon$ est polynomiale de degré 2, donc atteint son minimum pour $t = \frac{\varepsilon}{a} > 0$.

Ce minimum vaut $a\frac{\varepsilon^2}{2a^2} - \frac{\varepsilon^2}{a} = -\frac{\varepsilon^2}{2a}$. Comme exp est strictement croissante sur $\left[\frac{\varepsilon}{a}; +\infty\right]$, $t \mapsto e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2}$ atteint son minimum en le même point, et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) &\leq e^{\min_{t>0} \left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2} a \right)} \\ &\leq e^{-\frac{\varepsilon^2}{2a}} = e^{-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}}. \end{aligned} \tag{2}$$

On y est presque. On remarque que :

$$[|S_n| > \varepsilon] = [S_n > \varepsilon] \cup [S_n < -\varepsilon] = [S_n > \varepsilon] \cup [-S_n > \varepsilon].$$

Donc :

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n > \varepsilon).$$

(2) pouvant être appliquée à $-S_n$, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}}.$$

Cela achève la démonstration. □

Application 3.

Soit $\alpha > 0$. Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, on suppose que :

$$\exists \beta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{j=1}^n c_j^2 \leq n^{2\alpha-\beta}.$$

Alors, $\left(\frac{S_n}{n^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend $\mathbb{P}$ -presque sûrement vers 0.

PREUVE : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon' > 0$. On pose $\varepsilon = n^\alpha \varepsilon' > 0$. D'après l'inégalité de Hoeffding :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha \varepsilon') &\leq 2e^{-\frac{n^{2\alpha} \varepsilon'^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}} \\ &\leq 2e^{-\frac{n^{2\alpha} \varepsilon'^2}{2} \times n^{\beta-2\alpha}} \\ &\leq 2e^{-\frac{\varepsilon'^2 n^\beta}{2}} \\ &\leq 2e^{-\varepsilon'^2 n^\beta}. \end{aligned}$$

Or, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\varepsilon'^2 n^\beta}$ converge. En effet, comme $\beta > 0$ et $\varepsilon'^2 > 0$, par croissance comparée, $n^2 e^{-\varepsilon'^2 n^\beta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, et donc $e^{-\varepsilon'^2 n^\beta} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, avec $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ qui est une série de RIEMANN convergente ($2 > 1$).

En notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = [|S_n| > n^\alpha \varepsilon']$, par comparaison de séries à termes positifs, on a montré que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_n)$ converge.

D'après le lemme de BOREL-CANTELLI,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} [|S_n| > n^\alpha \varepsilon']\right) = 0.$$

Comme $\mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\varepsilon' \in \mathbb{Q}_+^*} \limsup_{n \rightarrow +\infty} [|S_n| > n^\alpha \varepsilon']\right) = 0.$$

Par passage au complémentaire,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\varepsilon' \in \mathbb{Q}_+^*} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{|S_n|}{n^\alpha} > \varepsilon'\right]\right) = 1.$$

On a finalement que, pour tout $\omega \in \Omega$, sachant que pour $\varepsilon > 0$, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{|S_n|}{n^\alpha} > \varepsilon'\right] = \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \geq n_0} \left[\frac{|S_n|}{n^\alpha} > \varepsilon'\right] :$

$$\begin{aligned} \omega \in \bigcap_{\varepsilon' \in \mathbb{Q}_+^*} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{|S_n|}{n^\alpha} > \varepsilon'\right] &\iff \forall \varepsilon' \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{|S_n(\omega)|}{n^\alpha} > \varepsilon' \\ &\iff \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{|S_n(\omega)|}{n^\alpha} > \varepsilon', \end{aligned}$$

par densité de $\mathbb{Q}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Cela achève le développement. □