

Développement : Équation de BESSEL

ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [ENS] FRANCINO S., GIANELLA H., NICOLAS S., *Exercices de mathématiques - Orlans X-ENS - Analyse 4*, Cassini, 2012, p101.

Ce développement ne se concentre pas sur l'étude asymptotique des solutions de l'équation de BESSEL. Pour avoir plus d'informations à ce sujet, on peut aller voir [BB] BERNIS J., BERNIS L., *Analyse pour l'agrégation de mathématiques - 40 développements*, ellipses, 2018, p87.

Pour les leçons :

- 220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.
- 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles ordinaires. Exemples et applications.
- 235 : Problèmes d'intervention de symboles en analyse.
- 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
- 243 : Séries entières, propriétés de la somme.
- 244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Théorème 1. Solutions développables en série entière de l'équation de BESSEL.

Soit (E) l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

Alors, (E) a une unique solution développable en série entière en 0 valant 1 en 0, notée y , et donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta.$$

PREUVE : ★ ÉTAPE 1 : Trouvons les solutions développables en série entière en 0 de (E) . Procédons par analyse-synthèse.

★ Analyse : Soit $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de (E) développable en série entière en 0, de rayon de convergence $R > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 0 &= xy''(x) + y'(x) + xy(x) \\ &= x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}) x^n. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière en 0, on obtient :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases},$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}.$$

Par récurrence, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)^2 (2n-2)^2 \dots 2^2} = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} a_0 \end{cases}.$$

Donc :

$$\forall x \in]-R; R[\quad y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

★ Synthèse : Soit $y : x \mapsto a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$, avec $a_0 \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}((n+1)!)^2}}{\frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}} \right| &= \left| \frac{4^n (n!)^2}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \right| \\ &= \frac{1}{4(n+1)^2} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

D'après la règle de D'ALEMBERT, le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ est $+\infty$, donc celui de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ également.

Des calculs similaires à l'analyse peuvent montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière en 0 est une droite vectorielle, engendrée par y . De plus :

$$y(0) = 1 \iff a_0 = 1.$$

Donc l'unique solution de (E) développable en série entière en 0 est la fonction $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

★ ÉTAPE 2 : Montrons que $g : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta$ est bien définie et solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

La fonction $(x, \theta) \mapsto \cos(x \sin(\theta))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme on intègre sur le **segment** $[0, \pi]$ (qui est un compact), on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2. Arguments plus précis pour affirmer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On peut se demander pourquoi on peut l'en déduire directement : c'est parce que toutes les hypothèses du théorème de LEIBNIZ (de dérivation sous l'intégrale) sont vérifiées. En particulier, la domination sur tout compact est facile, puisqu'on intègre sur un compact ; il suffit de majorer grossièrement par le sup de l'intégrande, qui est fini dans ce cas, et la fonction dominante est intégrable sur le **segment** $[0, \pi]$ et indépendante de x .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a en outre :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) \sin(x \sin(\theta)) d\theta, \\ g''(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(\theta) \cos(x \sin(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} xg''(x) + g'(x) + xg(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-x \sin^2(\theta) \cos(x \sin(\theta)) - \sin(\theta) \sin(x \sin(\theta)) + x \cos(x \sin(\theta))) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \cos(x \sin(\theta))(1 - \sin^2(\theta)) - \sin(\theta) \sin(x \sin(\theta))) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \cos^2(\theta) \cos(x \sin(\theta)) - \sin(\theta) \sin(x \sin(\theta))) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} [\sin(x \sin(\theta)) \cos(\theta)]_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

★ ÉTAPE 3 : Montrons que g est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ (**fixé**), on a :

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \sin(\theta)^{2n} d\theta.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $g_n : \theta \mapsto \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \sin(\theta)^{2n}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme g_n est continue sur le segment $[0, \pi]$, elle est intégrable sur $[0, \pi]$. De plus,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi g_n(\theta) d\theta \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \sin(\theta)^{2n} d\theta \right| \\ &\leq \pi \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Or, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \pi \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ converge (vers $\pi \cosh(|x|)$), ou alors on peut le voir grâce au critère de D'ALEMBERT).

Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_0^\pi g_n(\theta) d\theta \right|$ converge. On en déduit qu'on peut intervertir les symboles sommes et intégrales, d'après le théorème de FUBINI-LEBESGUE. Cela permet d'écrire :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \int_0^\pi \sin(\theta)^{2n} d\theta.$$

Donc g est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{R}$.

★ ÉTAPE 4 : Concluons.

g est une solution de (E) développable en série entière en 0 sur $\mathbb{R}$, avec $g(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta = 1$, tout comme f . Par unicité (prouvée dans l'ÉTAPE 1), on en déduit que $f = g$, ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque 3. Et dans la référence ?

Dans la référence, une autre propriété est prouvée : si h est solution sur $]0; a[$ ($a > 0$), alors (h, f) est libre si, et seulement si h est non bornée au voisinage de 0. Cela permet de montrer que $f = g$ autrement (g est solution, et est bornée, donc f et g sont liées, et on en déduit $f = g$ grâce à la condition initiale), mais je préfère ma preuve, donc je la garde.

Remarque 4. D'où vient l'équation de BESSEL ?

On peut trouver une motivation de cette équation dans la recherche des valeurs propres du laplacien sur la boule unité B . On considère donc l'équation aux dérivées partielles (avec $x \in \mathbb{R}^2$, sur la boule unité) suivante, où $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \Delta f(x) = \lambda f(x) & \text{si } |x| < 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } |x| = 1 \end{cases},$$

où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

→ Si f est une solution non nulle (assez régulière), on a $\lambda < 0$. En effet, en multipliant la première ligne par $f(x)$, en mettant au carré et en intégrant, on a :

$$\lambda \int_B f(x)^2 dx = \int_B f(x) \Delta f(x) dx = - \int_B |\nabla f(x)|^2 dx,$$

en faisant une intégration par parties (formule de GREEN, les termes de bord s'annulant grâce au fait que $f|_{\partial B} \equiv 0$).

Comme f est non nulle, $\lambda = \frac{- \int_B |\nabla f(x)|^2 dx}{\int_B f(x)^2 dx} < 0$. Donc $\lambda < 0$. On écrit $\lambda = -\mu^2$ avec $\mu > 0$, par exemple.

→ Si f est solution, on passe en coordonnées polaires : $g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Grâce à l'équation, on obtient :

$$\begin{cases} \partial_r^2 g(r, \theta) + \frac{1}{r} \partial_r g(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 g(r, \theta) = -\mu^2 g(r, \theta) \\ g(1) = 0 \end{cases}.$$

On cherche une solution de la forme $g(r, \theta) = h(r) \cos(n\theta)$ ou $h(r) \sin(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}$ (idée de séparer les variables).

En injectant, on obtient immédiatement $h(1) = 0$ et $h''(r) + \frac{1}{r} h'(r) + \left(\mu^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) h(r) = 0$. En multipliant par r^2 , on obtient l'équation de BESSEL d'ordre n . Pour $n = 0$, on obtient l'équation dont on vient de trouver les solutions.

Corollaire 5. Intégrales de WALLIS.

Soit $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des intégrales de WALLIS, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_n = \int_0^\pi \sin^n(\theta) d\theta.$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \pi.$$

PREUVE : D'après le théorème précédent, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} W_{2n}.$$

Par unicité du développement en série entière au voisinage de 0, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n)!} W_{2n},$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \pi,$$

ce qui achève la preuve. □