

Développement : Décomposition des fonctions de SOBOLEV

ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE
ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : Pas de référence... Désolé...

Pour les leçons :

- 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.
- 213 : Espaces de HILBERT. Exemples d'applications.
- 234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné.

Définition 1.

Soit $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$. On appelle *moment angulaire de u* la matrice $M(u)$ définie par :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; N \rrbracket \quad M(u)_{i,j} := \int_{\Omega} (x_i u_j(x) - x_j u_i(x)) dx.$$

Il est clair que pour tout $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $M(u) \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})$.

Définition 2.

On appelle *espace des mouvements rigides* l'ensemble :

$$\text{RM}(\Omega) := \left\{ r : x \mapsto Ax + b \mid A \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R}) \text{ et } b \in \mathbb{R}^N \right\}.$$

Le but du développement est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.

Soit $V = \left\{ u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \mid \int_{\Omega} u(x) dx = M(u) = 0 \right\}$.

Alors V est un $\mathbb{R}$ -espace de HILBERT, et on a $H^1(\Omega, \mathbb{R}^N) = V \oplus \text{RM}(\Omega)$.

Lemme 2.

Soit $Q \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; N \rrbracket \quad Q_{i,j} = \int_{\Omega} x_i x_j dx.$$

Alors, il existe $P \in O_N(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs tels que :

$$Q = P^T D P.$$

PREUVE : Pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$y^T Q y = \int_{\Omega} (y \cdot x)^2 dx \geq 0,$$

avec égalité si, et seulement si $y = 0$, puisque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Q est donc une matrice symétrique définie positive réelle. On conclut grâce au théorème spectral. $\square$

Lemme 3.

Soit $A \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^N$,

$$u(x) = Ax.$$

Si $M(u) = 0$, alors u est la fonction nulle.

PREUVE : Il est clair que $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Supposons que $M(u) = 0$, et montrons que A est la matrice nulle. Soient $i, j \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Pour $\ell \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on a :

$$u_{\ell}(x) = \sum_{k=1}^N A_{\ell,k} x_k.$$

Donc :

$$\begin{aligned} M(u)_{i,j} &= \int_{\Omega} \left(x_i \sum_{k=1}^N A_{j,k} x_k - x_j \sum_{k=1}^N A_{i,k} x_k \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^N A_{j,k} \int_{\Omega} x_i x_k dx - \sum_{k=1}^N A_{i,k} \int_{\Omega} x_j x_k dx. \end{aligned}$$

On pose, pour $i, k \in \llbracket 1; N \rrbracket$,

$$Q_{i,k} = \int_{\Omega} x_i x_k dx,$$

et Q la matrice $(Q_{i,k})_{i,k \in \llbracket 1; N \rrbracket}$. D'après le lemme précédent, on peut écrire :

$$Q = P^T D P,$$

avec $P \in O_N(\mathbb{R})$ et D diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

Par symétrie de Q et antisymétrie de A , on a :

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \llbracket 1; N \rrbracket \quad M(u)_{i,j} &= \sum_{k=1}^N A_{j,k} Q_{i,k} - \sum_{k=1}^N A_{i,k} Q_{j,k} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^N A_{j,k} Q_{k,i}}_{=(AQ)_{j,i}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N Q_{j,k} A_{k,i}}_{=(QA^T)_{j,i}} \\ &= (AQ + QA)_{j,i} \\ &= (AQ + QA)_{i,j}^T. \end{aligned}$$

Puisque $M(u) = 0$, on a $AQ + QA = 0$.

Posons $B = PAP^T$. Comme A est antisymétrique, B aussi. De plus,

$$\begin{aligned} 0 &= AQ + QA \\ &= P^T B P P^T D P + P^T D P P^T B P \\ &= P^T (BD + DB) P. \end{aligned}$$

Donc $BD + DB = 0$. En notant $B = (B_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1; N \rrbracket}$ et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$ avec $d_1, \dots, d_N > 0$, pour tout $i, j \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on a ainsi :

$$\sum_{k=1}^N (B_{i,k} D_{k,j} + D_{i,k} B_{k,j}) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$B_{i,j} d_j + d_i B_{i,j} = 0,$$

ou encore :

$$(d_i + d_j) B_{i,j} = 0.$$

Comme $d_i + d_j > 0$, on a $B_{i,j} = 0$ et donc B est la matrice nulle, ce qui prouve que $A = 0$. □

Théorème 4.

Soit $V = \left\{ u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \mid \int_{\Omega} u(x) dx = M(u) = 0 \right\}$.

Alors V est un $\mathbb{R}$ -espace de HILBERT, et on a $H^1(\Omega, \mathbb{R}^N) = V \oplus \text{RM}(\Omega)$.

PREUVE : ★ ÉTAPE 1 : Montrons tout d'abord que $H^1(\Omega, \mathbb{R}^N) = V + \text{RM}(\Omega)$.

Soit $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Posons $b = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$.

D'après le lemme précédent, l'application $A \mapsto M(A \text{Id}_{\Omega})$ est un endomorphisme injectif de $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc elle est bijective.

En particulier, il existe $A \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ telle que $M(A \text{Id}_{\Omega}) = M(u - b + A\hat{x})$.

On pose, pour $x \in \Omega$:

$$r(x) = Ax + b - A\hat{x}.$$

On a :

$$\forall x \in \Omega \quad u(x) = (u(x) - r(x)) + r(x).$$

Par définition, $r \in \text{RM}(\Omega)$. De plus,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u(x) - r(x)) dx &= \int_{\Omega} u(x) dx - \int_{\Omega} Ax dx - \int_{\Omega} b dx + \int_{\Omega} A\hat{x} dx \\ &= \int_{\Omega} u(x) dx - A \int_{\Omega} x dx - |\Omega|b + |\Omega|A\hat{x} \\ &= 0, \end{aligned}$$

et par définition de A , $M(u - r) = M(u - b + A\hat{x}) - M(A \text{Id}_{\Omega}) = 0$.

Donc $u - r \in V$, ce qui achève la démonstration.

★ ÉTAPE 2 : Montrons que $V \cap \text{RM}(\Omega) = \{0\}$. Soit $u \in V \cap \text{RM}(\Omega)$.

Comme $u \in \text{RM}(\Omega)$, il existe $A \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$ tels que :

$$\forall x \in \Omega \quad u(x) = Ax + b.$$

On a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} u(x) dx \\ &= A \int_{\Omega} x dx + b|\Omega|. \end{aligned}$$

Donc :

$$b = -A\hat{x},$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^N$ est la moyenne de la fonction identité sur Ω . Ainsi,

$$\forall x \in \Omega \quad u(x) = Ax - A\hat{x} = A(x - \hat{x}).$$

Considérons $v : x \mapsto u(x + \hat{x})$. On note $\hat{\Omega} = \Omega + \hat{x}$, qui est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$, et $v \in H^1(\hat{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.

Pour $x \in \hat{\Omega}$, on a $v(x) = Ax$. De plus, pour $i, j \in \llbracket 1; N \rrbracket$, par changement de variable,

$$\begin{aligned} M(v)_{i,j} &= \int_{\Omega + \hat{x}} (x_i v_j(x) - x_j v_i(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} ((x_i - \hat{x})u_j(x) - (x_j - \hat{x})u_i(x)) dx \\ &= M(u)_{i,j} + \hat{x} \left(\int_{\Omega} u_i(x) dx - \int_{\Omega} u_j(x) dx \right) \\ &= M(u)_{i,j}, \end{aligned}$$

car $\int_{\Omega} u(x) dx = 0$. Comme $M(u) = 0$, $M(v) = 0$.

D'après le lemme précédent, comme $v : x \mapsto Ax$ avec A antisymétrique, $A = 0$. On a enfin $b = -A\hat{x} = 0$, ce qui donne :

$$u = 0,$$

et donc $V \cap \text{RM}(\Omega) = \{0\}$.

Cela achève la démonstration. □