

Développement II-14

Parseval et calcul de $\zeta(2)$

Leçons :

- 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.
- 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Références :

- Haïm Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod
- Michel Raibaut, *Cours de suites numériques, suites et séries de fonctions*, poly de cours de l'Université Savoie Mont Blanc
- Denis Monasse, *Cours de Mathématiques*, Spartacus (référence du polycopié)

1 Contenu des plans

1.1 Leçon 213

Théorème	On suppose que H est somme hilbertienne des $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $u \in H$ et soit $u_n = P_{E_n} u$. Alors on a : a) $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ c'est-à-dire $u = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k u_n$. b) $\ u\ ^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \ u_n\ ^2$ (égalité de PARSEVAL). Réciproquement, étant donné une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in E_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \ u_n\ ^2 < +\infty$, alors la série $\sum_n u_n$ est convergente et $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, P_{E_n} u = u_n$.
-----------------	--

Application. $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{96}$.

2 Structure des développements

2.1 Leçon 213

3 Développement détaillé

Théorème On suppose que H est somme hilbertienne des $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $u \in H$ et soit $u_n = P_{E_n} u$. Alors on a :

$$a) \quad u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ c'est-à-dire } u = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k u_n.$$

$$b) \quad \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|^2 \text{ (égalité de PARSEVAL).}$$

Réciproquement, étant donné une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in E_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|^2 < +\infty$, alors la série $\sum_n u_n$ est convergente et $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, P_{E_n} u = u_n$.

Démonstration.

- $(\implies)$: Soit $\forall k \in \mathbb{N}, S_k = \sum_{n=1}^k P_{E_n}$, c'est un opérateur continu de H dans H .

Et pour $u \in H$, on a, par l'identité de Pythagore :

$$\|S_k u\|^2 = \sum_{n=1}^k \|u_n\|^2$$

D'autre part, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, \langle u | u_n \rangle = \|u_n\|^2$ (projection orthogonale).

Alors, par somme, $\forall k \in \mathbb{N}, \langle u | S_k u \rangle = \|S_k u\|^2$, d'où $\|S_k u\|^2 \leq \|u\|^2$ (Inégalité de Bessel).

Soit $\varepsilon > 0$ et $F = \text{Vect}(E_n | n \in \mathbb{N})$, alors $\exists \bar{u} \in F, \|u - \bar{u}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour k assez grand, on a $S_k \bar{u} = \bar{u}$.

Or par Bessel $\|S_k u - S_k \bar{u}\| \leq \|u - \bar{u}\|$, donc :

$$\|S_k u - u\| \leq \|S_k u - S_k \bar{u}\| + \|\bar{u} - u\| \leq 2 \|u - \bar{u}\| \leq \varepsilon$$

Alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k u = u$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|S_k u\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|^2$.

- $(\impliedby)$: Comme on travaille dans une somme hilbertienne, on a par l'égalité de Pythagore :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{n=p}^q u_n \right\|^2 = \sum_{n=p}^q \|u_n\|^2$$

Or, comme $\sum \|u_n\|^2$ converge, elle est de Cauchy et $\forall q \geq p, \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=p}^q \|u_n\|^2 = 0$.

Alors la suite $\left(\sum_{n=1}^k u_n \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H (espace de Hilbert), donc converge.

Notons u sa limite, alors par continuité de l'application $\|\cdot\|^2$, on a :

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|^2$$

Enfin, soit $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \in E_n$ par définition, et pour $v \in E_n$, par continuité de $\langle \cdot | \cdot \rangle$:

$$\langle u - u_n | v \rangle = \sum_{m=1, m \neq n}^{+\infty} \langle u_m, v \rangle = 0$$

ce qui conclut au fait que $P_{E_n} u = u_n$. □

Application. $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Démonstration. On considère la fonction paire, 2π -périodique définie sur $[0, \pi]$ par $f : x \mapsto x$. Ses coefficients de Fourier réels sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)$$

Et $a_0 = \pi, b_n = 0$ car la fonction f est paire.

Or f est continue $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc par le théorème de DIRICHLET :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} -\frac{4}{\pi (2p+1)^2} \cos((2p+1)x)$$

Et en calculant $f(0)$, on en déduit :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Et en appliquant l'égalité de Parseval ici (expliquer le cadre hilbertien), on obtient :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

On déduit de ces deux expressions :

$$\zeta(2) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \zeta(2), \text{ d'où } \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Et :

$$\zeta(4) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16} \zeta(4), \text{ d'où } \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

□