

Analycité des fonctions holomorphes

Recasages personnels : 235, 236, 239, 241, 243, 246 (convient aussi pour la 245 bien entendu)

Lemme. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π -périodique. Alors sa série de Fourier $(S_N(g))_{N \geq 0}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers g .

Pour les leçons 241 et 246, tiré de [1].

Démonstration. D'après le théorème de Dirichlet on a déjà la convergence simple vers g , il suffit donc par unicité de la limite simple de montrer que $(S_N(g))_{N \geq 0}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Pour cela remarquons d'abord que g' est encore 2π -périodique, puis que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g') = in c_n(g)$ par une simple intégration par parties, qui est licite car g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Cela étant dit, g' est continue sur $[0, 2\pi]$ donc est dans $L^2_{2\pi}$, puis par l'identité de Parseval,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(g')|^2 = \|g'\|_2^2 < \infty.$$

Donnons nous un $N \in \mathbb{N}^*$. On écrit

$$\sum_{1 \leq |n| \leq N} |c_n(g)| = \sum_{1 \leq |n| \leq N} \left| \frac{1}{n} \right| \times |n c_n(g)| = \sum_{1 \leq |n| \leq N} \left| \frac{1}{n} \right| \times |c_n(g')|$$

puis par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq |n| \leq N} |c_n(g)| &\leq \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} |c_n(g')|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(2 \frac{\pi^2}{6} \right)^{1/2} \|g'\|_2^2 < \infty, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Théorème. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au sens complexe. Soit $a \in \Omega$, on note $R = d(a, \Omega^c)$.

Alors f est développable en série entière autour du point a avec rayon de convergence égal à R . De plus, pour tout $r \in]0, R[$,

$$\int_{\mathcal{C}(a,r)} f(z) dz = 0 \quad \text{et} \quad f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(z)}{z-a} dz. \quad (1)$$

Quelque soit la leçon, tiré de [2] et [3].

Démonstration. Pour tout $r \in [0, R[$, on pose $f_r : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + re^{it}) \in \mathbb{C}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ (au sens réel) et 2π -périodique, si bien que le lemme nous donne que la série de fonction $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f_r) e^{int}$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. Cela étant dit, on peut écrire pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, R[$,

$$c_n(f_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r, t) dt,$$

avec :

- pour tout $r \in [0, R[$, $g(r, \cdot)$ intégrable car continue sur le segment $[0, 2\pi]$,
- pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $g(\cdot, t)$ est dérivable sur $[0, R[$ de dérivée $r \mapsto e^{it} f'(a + re^{it}) e^{-int}$,
- pour tout compact $[b_-, b_+] \subset [0, R[$, pour tous $r \in [b_-, b_+]$ et $t \in [0, 2\pi]$, $|e^{it} f'(a + re^{it}) e^{-int}| = |f'(a + re^{it})| \leq \sup_{\bar{D}(a, b_+)} |f'| < \infty$, f' étant continue sur Ω , et la majoration obtenue est bien indépendante de r .

Ainsi, par le théorème de dérivation sous l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $\varphi_n : r \in [0, R[\mapsto c_n(f_r)$ est dérivable de dérivée $\varphi'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it} f'(a + re^{it}) e^{-int} dt$.

En remarquant que pour $r \in]0, R[$,

$$e^{it} f'(a + re^{it}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{ir} f(a + re^{it}) \right),$$

on peut faire une intégration par parties et écrire

$$\begin{aligned} \forall r \in]0, R[, \quad 2\pi \varphi'_n(r) &= \left[\frac{1}{ir} f(a + re^{it}) e^{-int} \right]_{t=0}^{2\pi} \\ &+ \frac{in}{ir} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{-int} dt \\ &= 2\pi \frac{n}{r} \varphi_n(r). \end{aligned}$$

On sait que les solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 sont toutes de la forme $y(x) = \alpha x^n$ pour un $\alpha \in \mathbb{C}$, et donc on a prouvé qu'il existait une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ telle que pour tout $r \in]0, R[$, $c_n(f_r) = a_n r^n$. Or pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction φ_n est continue sur $[0, R[$, donc admet en particulier une limite à droite en zéro, or pour $n < 0$, $\lim_{r \rightarrow 0^+} |a_n| r^n = +\infty$ dès que $a_n \neq 0$, ce qui impose $a_n = 0$ pour les n négatifs. On a donc pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $r \in [0, R[$, $f_r(t) = \sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{int}$, puis pour tout $z \in D(a, R)$, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$, avec convergence normale de la série sur tout compact, on peut donc intervertir série et intégrale dans le calcul qui suit :

$$\forall r \in [0, R[, \quad \int_{\mathcal{C}(a, r)} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}(a, r)} \sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n dz,$$

$$\begin{aligned}
\text{i.e. } \int_{\mathcal{C}(a,r)} f(z) dz &= \sum_{n \geq 0} a_n \int_{\mathcal{C}(a,r)} (z-a)^n dz \\
&= \sum_{n \geq 0} a_n \int_0^{2\pi} (re^{it})^n i r e^{it} dt \\
&= i \sum_{n \geq 0} a_n r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = 0.
\end{aligned}$$

On a également

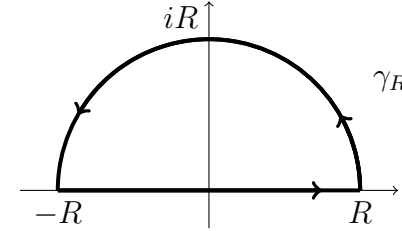
$$\int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(z)}{z-a} dz = a_0 \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{dz}{z-a} + \sum_{n \geq 1} a_n \int_{\mathcal{C}(a,r)} (z-a)^{n-1} dz$$

avec $a_0 = f(a)$, puis en calculant explicitement les intégrales (c'est sans difficulté) on aboutit au résultat. $\square$

Corollaire. $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$

Pour les leçons 236 et 239, tiré de [3].

Démonstration. On introduit la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ qui est $\mathcal{C}^1$ au sens complexe pour $z \notin \{-i, i\}$, et pour $R > 1$ le contour γ_R dessiné ci-dessous.



On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z) dz &= \int_{-R}^R f(t) dt + \int_0^\pi f(Re^{it}) i R e^{it} dt \\
&= \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{1+t^2} dt + \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{1+(Re^{it})^2} i R e^{it} dt.
\end{aligned}$$

Le deuxième terme tend vers 0 quand R tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e^{iRe^{it}}}{1+(Re^{it})^2} i R e^{it} \right| &= \frac{e^{-R \sin t} R}{\sqrt{1+R^4+2R^2 \cos(2t)}} \\
&\leq \frac{R}{\sqrt{1+R^4-2R^2}} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

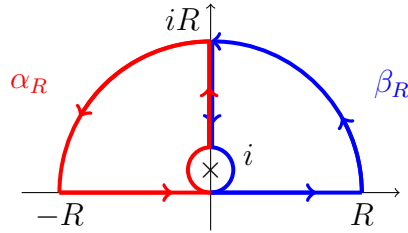
L'intégrale désirée est donc la limite lorsque R tend vers l'infini de la partie réelle de $\int_{\gamma_R} f(z) dz$. Pour calculer cette dernière on écrit

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-i} \text{ où } g : z \mapsto \frac{e^{iz}}{z+i} \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C} \setminus \{-i\}.$$

On sait d'après (1) que

$$\int_{\mathcal{C}(i,1)} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}(i,1)} \frac{g(z)}{z-i} dz = 2i\pi g(i) = 2i\pi \times \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

On va montrer en modifiant astucieusement γ_R qu'on peut toujours se ramener à ce cas. Posons les chemins α_R et β_R suivants :



Il apparaît que prendre α_R puis β_R revient exactement à prendre γ_R puis le cercle $\mathcal{C}(i, 1)$ dans le sens négatif. On a donc

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz - \int_{\mathcal{C}(i,1)} f(z) dz = \int_{\alpha_R} f(z) dz + \int_{\beta_R} f(z) dz,$$

avec les intégrales du membre de droite qui sont nulles d'après (1), car f est $\mathcal{C}^1$ au sens complexe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, d'où

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}(i,1)} f(z) dz = \frac{\pi}{e}.$$

En remettant tout bout à bout on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos t}{1+t^2} dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(\int_{-R}^R \frac{e^{it}}{1+t^2} dt \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_R} f(z) dz \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(\frac{\pi}{e} \right) = \frac{\pi}{e}. \end{aligned}$$

□

Remarques. Il faut bien motiver ce développement pendant les 6 minutes de présentation en insistant sur le fait que son esprit est de court-circuiter de la théorie classique des fonctions holomorphes en utilisant des arguments venus des séries de Fourier. L'avantage est que les preuves sont plus simples, mais qu'en contrepartie on est obligés de faire une hypothèse plus forte, à savoir la classe $\mathcal{C}^1$ au lieu de la simple dérivabilité, ce qui en pratique est très souvent (pour ne pas dire tout le temps) vérifié.

Concernant l'application au calcul d'intégrale, il faut avoir conscience qu'on peut raccourcir grandement la preuve en utilisant la formule des résidus, mais encore une fois ce n'est pas l'esprit du développement.

Pour ceux qui sont à l'aise avec le calcul différentiel, on peut démontrer le théorème en vérifiant les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaire. Je ne suis personnellement pas fan de cette approche, mais à vous de voir.

Références

- [1] Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels: niveau M1*. Ellipses Marketing, 2008.
- [2] Etienne MATHERON. *Série de Fourier et analyse complexe*. https://matheron.perso.math.cnrs.fr/enseignement_fichiers/23-24/FVC/PolyFVC.pdf [Consulté le : 17/02/2026].
- [3] Antoine MOUZARD. *Formule de Cauchy et un calcul d'intégrale*. <https://amouzard.perso.math.cnrs.fr/DEV/formulecauchy.pdf5> [Consulté le : 19/02/2026].