

Thm de Cohn:

1) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul
 $P(X) = \sum_{i=0}^m a_i X^i$, posons $H = \max_{i \in \{0, \dots, m\}} |a_i|$
 alors si $\forall m \in \mathbb{N}$, vérifie $m \geq H+2$ et
 $P(n)$ prime P est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.

2) Si $P(X) = \sum_{i=0}^m a_i X^i$ où $a_i \in \mathbb{I}0, b-1\mathbb{I}$
 $b \geq 3$ et si $P(b) = p \in \mathbb{P}$ alors P irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.
 (vrai aussi pour $b=2$ mais pas noté).

1) Si P est réductible dans $\mathbb{Z}[X]$, $\exists A, B \in \mathbb{Z}[X]$
 tq $P = AB$, alors comme $P(n)$ est premier
 $A(n)$ ou $B(n) = \pm 1$ car $|A(n)| = 1$

Comme A est scindé sur $\mathbb{C}[X]$, on peut écrire
 $A = a \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)$ où $a \in \mathbb{Z}$ est le coef dominant
 de A , $k \geq 1$ sa degré et α_i ses racines complexes.

Les α_i sont aussi racines de $P = AB$. Mq

(*) : $|\alpha_i| \leq H+1$ car si on a ça par I-T et par
 $m \geq H+2$ $|A(n)| \geq \frac{|a|}{\prod_{i=1}^k (n - |\alpha_i|)} > \frac{|a|}{(n - H - 1)^k} \geq 1$
 donc on aura $|A(n)| \geq 1$ absurde car $|A(n)| = \pm 1$
 d'où le résultat

(*) : Soit α une racine de P . On rappelle $P(\alpha) = 0$
 $\Rightarrow -a_m \alpha^m = a_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0$

On divise par a_m qui est non nul car le
 coef dominant. Puis on utilise la def
 de H , $|\alpha|^m \leq H(|\alpha|^{m-1} + \dots + |\alpha| + 1) \leq H|\alpha|^{m-1}$

Si $H=0$ $P = a_m X^m$ et $\alpha = 0$ vérifie bien

$|\alpha| = 0 \leq H+1 = 0+1$. Donc on peut supposer

que $H \neq 0$. Si $0 < |\alpha| \leq 1$ et $H \neq 0$ on a toujours

l'inégalité. Si $|\alpha| > 1$, on peut multiplier

par $|\alpha| - 1 > 0$ l'inégalité précédente pour
 obtenir $|\alpha|^{m+1} - |\alpha|^m \leq H|\alpha|^m$

donc $|\alpha|^{m+1} - |\alpha|^m \leq H|\alpha|^m$ i.e. $|\alpha| < H+1$ o.k.

Par 2) Un peu pareille.

$$P \in AB, \quad A(b) = \pm 1 \quad \text{d'ac} \quad \prod_{\alpha \text{ racine}} (b - \alpha) = \pm 1$$
$$a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Maq $|b - \alpha| \geq 1 \quad \forall \alpha \text{ racine de } P.$

$$|b - \alpha| \geq 1, \quad \operatorname{Re}(b - \alpha) = b - \operatorname{Re}(\alpha)$$

D'ac si $\operatorname{Re}(\alpha) \leq 0 \quad \text{OK}$

Or si $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$: Si $|\alpha| \leq 1$:

$$|b - \alpha| \geq |b| - |\alpha| \geq b - 1 > 1 \quad \text{OK}$$

Soit $r = |\alpha| > 1$,

$$P(\alpha) = 0 \quad \text{et } \alpha \neq 0 \quad a_n + \frac{a_{n-1}}{\alpha} + \frac{a_{n-2}}{\alpha^2} + \dots + \frac{a_0}{\alpha^n} = 0$$

$$\text{d'ac } \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{\alpha} \right| \leq (b-1) \sum_{i=2}^n \frac{1}{r^i}$$

$$\text{On minore par } 1 \leq a_n + \frac{a_{n-1} \operatorname{Re}(\alpha)}{r^n} \leq \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{\alpha} \right|$$

On a en gros

$$\leq \frac{(b-1)}{r^2 - r} \Rightarrow r^2 - r - (b-1) \leq 0$$

$$\text{d'ac } r \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4(b-1)}}{2} \leq b-1$$

\(\hookrightarrow\) étude de fct car $(b-3) \leq (2b-3)^2$

$$4b^2 - 16b + 12 = 4(b-3)(b-1) \geq 0$$

$$\text{d'ac } |b - \alpha| \geq b - r > 1$$

□