

Recasages possibles : 230, 243, 246

Référence : Oaux X-ens Analyse 2, FRANCINO, GIANELLA, NICOLAS (p. 297-300).

Développement

Pour $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on pose $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ et on considère $f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ pour $t \neq 0$.

Alors, f est prolongeable par continuité en 0, développable en série entière en 0 et si on note $\sum \frac{b_k}{k!} z^k$ son développement, alors on a

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} b_{2k}$$

En particulier, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$; $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$; $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

- On introduit pour $t \in \mathbb{R}^*$ la fonction φ_t définie pour $x \in]-\pi, \pi]$ par $\varphi_t(x) = e^{\frac{tx}{2\pi}}$ puis étendu à $\mathbb{R}$ par 2π -périodicité. Comme φ_t est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on veut utiliser le théorème de Jordan-Dirichlet sur la convergence simple de sa série de Fourier. On calcule donc ses coefficients de Fourier : Soit $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} c_n(\varphi_t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_t(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(\frac{t}{2\pi} - in)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(\frac{t}{2\pi} - in)x}}{\frac{t}{2\pi} - in} \right]_{-\pi}^{\pi} \quad \text{car } t \neq 0 \text{ donc } \frac{t}{2\pi} - in \neq 0 \\ &= \frac{e^{\frac{t}{2}} e^{-in\pi} - e^{-\frac{t}{2}} e^{in\pi}}{t - 2i\pi n} \\ &= \frac{(-1)^n}{t - 2i\pi n} (e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}) \end{aligned}$$

Comme mentionné précédemment, on applique le théorème de Jordan-Dirichlet à la série de Fourier de φ_t , ce qui donne : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\varphi_t(x^+) + \varphi_t(x^-)}{2} = S(\varphi_t)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi_t) e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{inx}}{t - 2i\pi n} (e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}})$$

En particulier, en $x = \pi$, comme $\varphi_t(\pi^+) = \varphi_t(-\pi) = e^{-\frac{t}{2}}$ et $\varphi_t(\pi^-) = e^{\frac{t}{2}}$, on trouve

$$\frac{e^{-\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}}}{2(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n (-1)^n}{t - 2i\pi n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{t - 2i\pi n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{t + 2i\pi n}{t^2 + 4\pi^2 n^2}$$

Or, en modifiant le membre de gauche, on peut écrire :

$$\frac{e^{-\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}}}{2(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}})} = \frac{e^t + 1}{2(e^t - 1)} = \frac{e^t - 1 + 2}{2(e^t - 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^t - 1}$$

De même, en regroupant les termes d'indices n et $-n$, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{t + 2i\pi n}{t^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{t} + \sum_{n \geq 1} \frac{2t}{t^2 + 4\pi^2 n^2}$$

Ainsi, on a obtenu l'égalité $\forall t \neq 0$,

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{t}{t^2 + 4\pi^2 n^2}$$

- On a donc $\forall t \neq 0$, $f(t) = \frac{t}{e^t - 1} \stackrel{(*)}{=} 1 - \frac{t}{2} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2}$. Or, $e^t - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, donc

f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$, et la relation $(*)$ est en fait valable pour tout $t \in \mathbb{R}$. On cherche désormais à trouver le développement en série entière de f en utilisant le développement en série entière de $\frac{1}{1+u^2}$. Rappelons à ce sujet qu'on a pour tout $u \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1+u^2} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k u^{2k}$.

Soit donc $t \in]-2\pi, 2\pi[$ de sorte que $\forall n \geq 1$, $\left| \frac{t}{2\pi n} \right| \leq \left| \frac{t}{2\pi} \right| < 1$. On a $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2} &= \frac{t^2}{4\pi^2 n^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{2\pi n}\right)^2} = \frac{t^2}{4\pi^2 n^2} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left(\frac{t}{2\pi n}\right)^{2k} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi n)^{2k}} t^{2k} \end{aligned}$$

Finalement, $\forall t \in]-2\pi, 2\pi[$, $f(t) = \frac{t}{e^t - 1} \stackrel{(*)}{=} 1 - \frac{t}{2} + 2 \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi n)^{2k}} t^{2k}$.

On voit alors que si l'on parvient à échanger les deux sommes, on aura obtenu

un développement en série entière de f sur $] -2\pi, 2\pi[$. Justifions que cela est licite.

On a $\sum_{k \geq 1} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi n)^{2k}} t^{2k} \right| = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{t}{2\pi n} \right)^{2k} = \frac{\frac{t^2}{4\pi^2 n^2}}{1 - \frac{t^2}{4\pi^2 n^2}} = \frac{t^2}{4\pi^2 n^2 - t^2}$. De plus, $\frac{t^2}{4\pi^2 n^2 - t^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2}{4\pi^2 n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann. Ainsi, $\sum_{n \geq 1} \frac{t^2}{4\pi^2 n^2 - t^2}$ converge et on peut donc appliquer le théorème sur les séries doubles permettant d'échanger l'ordre de sommation : $\forall t \in] -2\pi, 2\pi[$,

$$f(t) = 1 - \frac{t}{2} + 2 \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi n)^{2k}} t^{2k} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2k}} \right) t^{2k}$$

On a obtenu un développement en série entière en 0 de f qui fait apparaître $\zeta(2k)$. Par unicité du développement en série entière en 0, si on écrit $f(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{k!} t^k$ au voisinage de 0, on obtient par identification $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $\forall k \geq 1$, $b_{2k+1} = 0$, et

$$\frac{b_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \zeta(2k) \iff \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} b_{2k}$$

- On peut en fait calculer de manière astucieuse les coefficients b_{2k} , appelés nombre de Bernoulli, grâce à une relation de récurrence. En effet remarquons que pour

tout $t \in] -2\pi, 2\pi[$, on a $t = f(t)(e^t - 1) = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} t^n \right) \left(\sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{k!} \right)$. Comme les

séries en présence sont absolument convergente pour tout $t \in] -2\pi, 2\pi[$, on peut utiliser le produit de Cauchy et obtenir

$$t = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} t^k \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} \right) t^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k \right) \frac{t^n}{n!}$$

La somme sur k s'arrête à $n-1$ car on doit avoir $n-k \geq 1$. À nouveau en identifiant les coefficients par unicité du développement en série entière, on obtient $\forall n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$, ou encore $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k = 0$. Ceci nous permet d'obtenir la relation de récurrence suivante

$$\forall n \geq 1, b_n = -\frac{1}{\binom{n+1}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k = b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$$

En particulier, comme on a déjà vu que $b_0 = 1$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \mathbb{Q}$ et on peut calculer les premiers nombres de Bernoulli rapidement. On obtient $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$, $b_6 = \frac{1}{42}$... En reprenant la formule que l'on a prouvé sur $\zeta(2k)$, cela permet d'obtenir les valeurs annoncées, c'est-à-dire

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} ; \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} ; \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

Commentaires : Ce développement est assez calculatoire (donc il faut se méfier des potentielles coquilles au niveau des indices) mais surtout relativement long. Tout peut rentrer en 15 minutes mais il faut vraiment le préparer bien à l'avance pour avoir en tête les quelques pièges potentiels qui pourraient nous faire perdre du temps. Peut-être qu'une solution pour gagner du temps pourrait être d'admettre le calcul des coefficients de Fourier ou alors de ne pas faire les manipulations sur la série de Fourier de φ_t et admettre directement la formule (*). Tout dépend dans quelle leçon on se trouve, c'est peut-être pas une bonne idée de s'éterniser sur l'aspect série de Fourier, dans la leçon 230, et à l'inverse peut-être que la relation de récurrence sur les nombres de Bernoulli n'est pas intéressante pour la leçon 246.

Par contre je ne sais pas trop si ce développement a sa place dans la leçon 235 sur l'interversion de symboles en analyse. Bien qu'il y ait un échange de deux sommes infinies, ça me paraît un peu léger. Mais bon pourquoi pas ça reste relié.