

Recasages possibles : 235, 236, 239, 241, 245.

Référence : Objectif agrégation, BECK, MALICK, PEYRÉ (p. 82-83) - Analyse pour l'agrégation, ZUILY, QUEFFÉLEC (p. 312-313).

Développement On considère la fonction Γ définie sur $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ par

$$\Gamma : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \end{cases}$$

Lemme 1 Γ est bien définie, holomorphe sur $\mathcal{P}$, et vérifie $\forall z \in \mathcal{P}$,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Théorème 2 La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pôles simples en les entiers négatifs.

• *Preuve du Lemme 1 :*

- Montrons tout d'abord que Γ est bien définie, i.e que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ est bien intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $z \in \mathcal{P}$. Notons pour cela

$$f : \begin{cases}]0, +\infty[\times \mathcal{P} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (t, z) & \longmapsto e^{-t} t^{z-1} \end{cases}$$

Soit $z \in \mathcal{P}$. On a tout d'abord que $t \mapsto f(t, z)$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$\forall t > 0, |f(t, z)| = e^{-t} t^{\Re(z)-1} = e^{-\frac{t}{2}} \left(e^{-\frac{t}{2}} t^{\Re(z)-1} \right) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$$

par croissances comparées. Ainsi, comme $t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}$ est positive et intégrable en $+\infty$, $t \mapsto f(t, z)$ est intégrable en $+\infty$ par critère de comparaison. De même,

$$|f(t, z)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\Re(z)}}$$

qui est intégrable en 0 d'après le critère de Riemann car $\Re(z) > 0$ et positive, donc à nouveau par comparaison, $t \mapsto f(t, z)$ est intégrable en 0. Finalement, pour tout $z \in \mathcal{P}$, $t \mapsto f(t, z)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ donc Γ est bien définie.

- On utilise désormais le théorème d'holomorphie sous l'intégrale pour montrer que $\Gamma \in \mathcal{H}(\mathcal{P})$. Tout d'abord, pour tout $t > 0$ fixé, la fonction $z \mapsto f(t, z)$ est holomorphe sur $\mathcal{P}$. Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Alors $\forall t > 0, \forall z \in \mathcal{P}$ tel que $\Re(z) \in [a, b]$, on a

$$|f(t, z)| = e^{-t} e^{(\Re(z)-1) \ln(t)} \leq \begin{cases} e^{(a-1) \ln(t)} = \frac{1}{t^{1-a}} & \text{si } t \leq 1 \\ e^{-t} e^{(b-1) \ln(t)} = e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Or, la fonction $t \mapsto \mathbf{1}_{t \leq 1} \frac{1}{t^{1-a}} + \mathbf{1}_{t > 1} e^{-t} t^{b-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et indépendante de z . Ainsi, d'après le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, ceci étant vrai pour tout $z \in \mathcal{P}$, la fonction Γ est holomorphe sur $\mathcal{P}$.

- Pour montrer la dernière assertion du lemme, on écrit $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ où

$$\Gamma_1(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{et} \quad \Gamma_2(z) = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $z \in \mathcal{P}$, on a $\Gamma_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$.

On se sert pour cela du développement en série entière de l'exponentielle. En effet, soit $z \in \mathcal{P}$. On a

$$\Gamma_1(z) = \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} dt.$$

On veut utiliser le théorème de Fubini pour intervertir intégrale et somme (la somme étant l'intégrale pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$). Pour cela, il faut justifier que

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| dt < +\infty.$$

On a pour tout $t \in]0, 1]$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} \right| |t^{n+z-1}| = t^{\Re(z)-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = t^{\Re(z)-1} e^t.$$

Or, $t \mapsto t^{\Re(z)-1} e^t$ est intégrable sur $]0, 1]$ d'après le critère de Riemann car $\Re(z) > 0$. Ainsi, on peut appliquer le théorème de Fubini et on obtient

$$\Gamma_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{t^{z+n}}{z+n} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

- *Preuve du Théorème 2* : La fonction Γ_2 est en fait bien définie sur $\mathbb{C}$ et même holomorphe sur $\mathbb{C}$. En effet, il suffit de reprendre le même raisonnement que pour le début du **Lemme 1** en observant que pour tout $t \in [1, +\infty[$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \in [a, b]$, on a $|e^{-tz}t^{-1}| \leq e^{-tb-1}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ et indépendant de z . Ainsi, par théorème d'holomorphic sous l'intégrale, $\Gamma_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. De même, sous la forme obtenue dans le **Lemme 1**, on montre que Γ_1 est définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ avec pôles simples en les entiers négatifs. On considère la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-n\}, f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec unique pôle simple en $-n$. Soit $K \subset \mathbb{C}$ compact. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D}(0, N)$. Alors, pour tout $n \geq N+1$, f_n n'a pas de pôle dans K , donc $f_n \in \mathcal{H}(K)$. De plus, si $z \in K$, on a

$$|z+n| \geq n - |z| \geq n - N.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N+1$ et pour tout $z \in K$, $|f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N)}$. Par conséquent, la série de fonctions $\sum_{n \geq N} f_n$ est normalement convergente sur K . La somme de cette série est donc une fonction holomorphe sur K . Mais comme

$$\forall z \in K, \Gamma_1(z) = \sum_{n=0}^N f_n(z) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(z),$$

que le premier membre est méromorphe sur K avec pôles simples en les éléments de $(-\mathbb{N}) \cap K$, et que le deuxième membre est holomorphe sur K , on obtient que Γ_1 est méromorphe sur K avec pôles simples en les éléments de $(-\mathbb{N}) \cap K$. Ceci étant vrai pour tout compact K , Γ_1 est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pôles simples en les éléments de $-\mathbb{N}$.

Finalement, la fonction $\Gamma_1 + \Gamma_2$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec pôles simples en les entiers négatifs, et est égale à la fonction Γ sur $\mathcal{P}$, c'est donc un prolongement holomorphe de Γ à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. Remarquons que par le théorème de prolongement analytique, comme $\mathcal{P}$ admet un point d'accumulation (tout point de $\mathcal{P}$ est un point d'accumulation en fait) et que $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ est un ouvert connexe, ce prolongement holomorphe de Γ est unique.