

Références :

Algèbre, Xavier Gourdon

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Notation. On note Π_f le polynôme minimal de f et

$$\mathcal{L}_f = \{P(f) : P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Si $x \in E$, on note P_x le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] : P(f)(x) = 0\}$ et

$$E_x = \{P(f)(x) : P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Déf. Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On appelle **matrice compagnon** de P la matrice

$$\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Lemme. Il existe $x \in E$ tel que $P_x = \Pi_f$.

Lemme.

- Si $k = \deg(\Pi_f)$, l'ensemble $\mathcal{L}_f$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension k , dont une base est $(\text{Id}, f, \dots, f^{k-1})$.
- Si $l = \deg(P_x)$, l'ensemble E_x est un sous espace vectoriel de E de dimension l , dont une base est $(x, f(x), \dots, f^{l-1}(x))$.

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P &\mapsto P(f) \end{aligned}$$

est linéaire. Son image est $\mathcal{L}_f$.

Montrons que $(\text{Id}, f, \dots, f^{l-1})$ est une base de $\mathcal{L}_f$.

- Libre.

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{l-1}$ tels que $\lambda_0 \text{Id} + \dots + \lambda_{l-1} f^{l-1} = 0$.

Posons $P = \lambda_0 + \dots + \lambda_{l-1} X^{l-1}$, on a alors $P(f) = 0$.

Ainsi, $\Pi_f | P$. Or $\deg(P) < \deg(\Pi_f)$ donc $P = 0$.

- Génératrice.

Soit $P(f) \in \mathcal{L}_f$.

On effectue la division euclidienne de P par Π_f .

$$P = \Pi_f Q + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(\Pi_f) = l.$$

Ainsi, $P(f) = R(f) \in \text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{l-1})$.

□

Théo. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe $F_1, \dots, F_r$ sous espaces vectoriels de E stables par f tels que

- (i) $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$
- (ii) Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $f|_{F_i}$ est un endomorphisme cyclique.
- (iii) Si P_i désigne le polynôme minimal de f_i , alors on a $F_{i+1} | F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$.

On appelle $P_1, \dots, P_r$ la suite des **invariants de similitude**.

Démonstration. Soit $k = \deg(\Pi_f)$ et soit $x \in E$ tel que $P_x = \Pi_f$.

Le sous espace vectoriel $F = E_x$ est de dimension k et il est stable par f . Comme $\deg(P_x) = k$, la famille de vecteurs

$$e_1 = x, e_2, \dots, e_k = f^{k-1}(x)$$

forme une base de F . Complétons cette base en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E . En désignant par $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale associée, on note

$$G = \Gamma^\circ \text{ où } \Gamma = \{e_k^* \circ f^i, i \in \mathbb{N}\}.$$

Autrement dit, $G = \{x \in E : \forall i \in \mathbb{N}, e_k^* \circ f^i(x) = 0\}$. G est un sous espace vectoriel de E stable par f .

Montrons que $F \oplus G = E$

► Montrons que $F \cap G = \{0\}$

Soit $y \in F \cap G$. Si $y \neq 0$, on peut écrire $y = a_1 e_1 + \dots + a_p e_p$ avec $a_p \neq 0$ et $p \leq k$. En composant par $e_k^* \circ f^{k-p}$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 & \underset{y \in G}{=} e_k^* \circ f^{k-p}(y) \\ &= e_k^*(y_1 f^{k-p}(e_1) + \dots + y_p f^{k-p}(e_p)) \\ &= e_k^*(y_1 f^{k-p}(x) + \dots + y_p f^{k-1}(x)) \\ &= e_k^*(y_1 e_{k-p+1} + \dots + y_p e_k) \\ &= y_p \end{aligned}$$

ce qui est absurde car on a supposé $y_p \neq 0$.

► Montrons que $\dim(F) + \dim(G) = n$ ie $\dim(G) = n - k$.

On sait que $G = \Gamma^\circ = (\text{Vect} \Gamma)^\circ$ et $\dim(\text{Vect} \Gamma) + \dim(\text{Vect} \Gamma)^\circ = n$.

Montrons que $\dim(\text{Vect} \Gamma) = k$. Posons

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}_f &\rightarrow \text{Vect} \Gamma \\ g &\mapsto e_k^* \circ g \end{aligned}$$

Par définition de Γ , ϕ est surjective.

Soit $g \in \text{Ker} \phi$. On a alors $e_k^* \circ g = 0$ et, comme $g \in \mathcal{L}_f$,

$$g = g_1 \text{Id} + \dots + g_p f^{p-1} \text{ avec } g_p \neq 0 \text{ et } p \leq k$$

On a donc $0 = e_k^* \circ g(f^{k-p}(x)) = g_p \neq 0$. Ainsi $g = 0$ et ϕ est un isomorphisme.

Ainsi, $\dim(\text{Vect} \Gamma) = \dim(\mathcal{L}_f) = k$ et on a le résultat.

Soit P_1 le polynôme minimal de $f|_F$ (qui est le polynôme minimal de f car $P_1 = P_x = \Pi_f$). Soit P_2 le polynôme minimal de $f|_G$. Comme G est stable par f , on a $P_1(f|_G) = \Pi_f(f|_G) = 0$ et donc $P_2|P_1$.

Par récurrence sur $f|_G$ et à G , on obtient le résultat. $\square$

Corollaire. Si $P_1, \dots, P_r$ désigne la suite des invariants de similitude de $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Soit $F_1, \dots, F_r$ les sous espaces vectoriels stables par f donnés par le théorème avec $l_i = \dim(F_i)$.

On a $f_i = f|_{F_i}$ cyclique.

Ainsi, il existe $x_i \in F_i$ tel que $\mathcal{B}_i = (x_i, f(x_i), \dots, f_i^{l_i-1}(x_i))$ base de F_i .

On a donc

$$[f_i]_{\mathcal{B}_i} = \mathcal{C}(P_i)$$

d'où le résultat en écrivant f dans la base $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$. $\square$

Leçons possibles : 150 - 151 - 153 - 154 - 159