

Projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert et applications.

Soit H un espace de Hilbert *réel ou complexe*, ie un espace vectoriel normé complet où la norme découle d'un produit scalaire $\langle, \rangle$. Dans le cadre complexe on rappelle que $\langle, \rangle$ vérifie :

- $\langle, \rangle$ est sesquilinéaire, ie linéaire à gauche et semi-linéaire à droite.
- $\langle, \rangle$ est hermitienne ie pour tout $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle, \rangle$ est définie positive.

[Skand]

Introduction Le théorème de projection sur un convexe fermé est un outil fondamental de la théorie des espaces de Hilbert. Grâce à ce théorème nous déduirons la structure du dual d'un espace de Hilbert et nous serons en mesure de construire l'adjoint d'une application linéaire continue entre deux espaces de Hilbert.

Théorème 1. Soient H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H . Pour tout $x \in H$, il existe un et un seul point $y \in C$ tel que $d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = \|x - y\|$ et on appelle $y = p_C(x)$ le projeté orthogonal de x sur C . Il est caractérisé par :

$$y = p_C(x) \iff \forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle y - x, y - z \rangle) \leq 0$$

Démonstration.

Objectif 1. Existence du projeté orthogonal.

On pose $d = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$. Puisque $d^2 = \inf_{z \in C} \|x - z\|^2$, par définition de la borne inférieure, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in C, \|x - y_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$

Objectif : Montrer que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Par l'identité du parallélogramme $\|z - z'\|^2 = 2\|z\|^2 + 2\|z'\|^2 - \|z + z'\|^2$ appliquée à $z = y_n - x$ et $z' = y_p - x$ on a :

$$\begin{aligned} \|y_n - y_p\|^2 &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_p - x\|^2 - \|y_n + y_p - 2x\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_p - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_p + y_n}{2} - x\right\|^2 \\ &\leq (2d^2 + \frac{2}{n}) + (2d^2 + \frac{2}{p}) - 4d^2 \\ &\leq \frac{2}{n} + \frac{2}{p} \end{aligned}$$

car C étant convexe, $\frac{y_n + y_p}{2} \in C$ et $\|\frac{y_p + y_n}{2} - x\| \geq d$. Ainsi comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} = 0$ on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leq \varepsilon$$

et on en déduit que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy. Puisque H est complet, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et on note sa limite $y \in C$ car C est fermé. Par continuité de la norme on a alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\|^2 = \|y - x\|^2$ puis :

$$\|y - x\|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d^2 + \frac{1}{n} = d^2$$

Donc $\|y - x\| \leq d$ et par définition de d , $\|y - x\| \geq d$ soit $\|y - x\| = d = d(x, C)$.

Objectif 2. Unicité du projeté orthogonal

Supposons par l'absurde qu'il existe $y \neq y'$ tels que $d = \|x - y\| = \|x - y'\|$. Comme C est convexe $\frac{y + y'}{2} \in C$ et par l'identité du parallélogramme on a :

$$\begin{aligned} \left\|\frac{y + y'}{2} - x\right\|^2 &= \left\|\frac{1}{2}(y - x) + \frac{1}{2}(y' - x)\right\|^2 \\ &= 2 \times \frac{1}{4}\|y - x\|^2 + 2 \times \frac{1}{4}\|y' - x\|^2 - \frac{1}{4}\|y - y'\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\|y - x\|^2 + \|y' - x\|^2) - \frac{1}{4}\|y - y'\|^2 \\ &= d^2 - \frac{1}{4}\|y - y'\|^2 \\ &< d^2 \end{aligned}$$

Absurde, par définition de d .

Objectif 3. *CNS pour être le projeté orthogonal de x sur C .*

Supposons dans un premier temps que y est le projeté orthogonal de x sur C et soit $z \in C$. Par convexité de C , $(1 - \lambda)y + \lambda z \in C$ pour $\lambda \in [0, 1]$ (le segment $[y, z]$ est contenu dans C). Par définition du projeté orthogonal on a :

$$\|x - ((1 - \lambda)y + \lambda z)\|^2 = \|x - y + \lambda(y - z)\|^2 \geq d^2 = \|x - y\|^2$$

En développant, il vient : $\|x - y\|^2 + 2\lambda \text{Re}(\langle x - y, y - z \rangle) + \lambda^2 \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$ soit :

$$2\lambda \text{Re}(\langle x - y, y - z \rangle) + \lambda^2 \|y - z\|^2 \geq 0$$

et pour $\lambda \neq 0$, $2\text{Re}(\langle x - y, y - z \rangle) + \lambda \|y - z\|^2 \geq 0$. En faisant tendre λ vers 0 dans l'expression ci-dessus, on a bien :

$$\text{Re}(\langle x - y, y - z \rangle) \geq 0 \iff \text{Re}(\langle y - x, y - z \rangle) \leq 0.$$

Inversement, supposons la condition ci-dessus satisfaite et montrons que y est alors le projeté orthogonal de x sur C . Il suffit de montrer que la condition ci-dessus implique que pour tout $z \in C$, on a : $\|z - x\| \geq \|y - x\|$. Or,

$$\begin{aligned} \|z - x\|^2 &= \|(z - y) - (x - y)\|^2 \\ &= \|y - x\|^2 + \|z - y\|^2 - \underbrace{2\text{Re}(\langle y - x, y - z \rangle)}_{\geq 0} \geq \|y - x\|^2 \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Corollaire 1. *Soit C un sev fermé de H (en particulier C est naturellement convexe). Alors, $H = C \oplus C^\perp$ et p_C est une application linéaire continue.*

Démonstration. Si $x \in C \cap C^\perp$, on a en particulier $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0$ et $x = 0$. Démontrons désormais que $H = C + C^\perp$. Pour ce faire, considérons un point $x \in H$ et notons y le projeté orthogonal de x sur C . Notre objectif est de montrer que x se décompose sous la forme :

$$x = (x - y) + y \text{ où } x - y \in C^\perp.$$

Considérons $z \in C$ et montrons donc que $\langle x - y, z \rangle = 0$. Pour $u \in \mathbb{K}$, comme C est un espace vectoriel, $y + uz \in C$ et d'après ce qui précède on a :

$$\text{Re}(\langle y - x, y - (y + uz) \rangle) = \text{Re}(\langle y - x, -uz \rangle) = \text{Re}(\langle x - y, uz \rangle) \leq 0$$

Prenant $u = \langle x - y, z \rangle \in \mathbb{K}$. On a :

$$\text{Re}(\langle x - y, uz \rangle) = \text{Re}(\overline{u} \langle x - y, z \rangle) = \text{Re}(u\overline{u}) = \|u\|^2 \leq 0 \implies u = 0.$$

Ce qui montre bien que $x - y \in C^\perp$ et donne la décomposition annoncée.

Objectif 4. *montrer que p_C est linéaire continue.*

Puisque $H = C \oplus C^\perp$ l'application définie par :

$$\forall x = x_1 + x_2 \in H = C \oplus C^\perp, P(x) = P(x_1 + x_2) = x_1$$

est la projection orthogonale sur C parallèlement à $C^\perp$, qui est clairement linéaire. D'après la première partie du corollaire $P = P_C$ et quant à la continuité, on a pour $x \in C$ et $y \in C^\perp$:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2 = \|p_C(x + y)\|^2$$

Il en résulte que pour tout $z \in H$, on a $\|p_C(z)\| \leq \|z\|$ et donc p_C est continue avec $\|p_C\| \leq 1$. □

En application, voici l'important théorème de caractérisation du dual d'un espace hilbertien :

Théorème 2. Représentation de Riesz-Fréchet. *Soit f une forme linéaire continue sur H . Alors, il existe un unique vecteur $a \in H$ tel que $f(x) = \langle x, a \rangle$ pour tout $x \in H$.*

Démonstration. Eliminons pour commencer le cas où $f = 0$, dans ce cas $a = 0$ convient. Sinon $f \neq 0$ implique que $\text{Ker}(f) \neq H$ et que $\text{Ker}(f)$ est un sev fermé car f est continue. D'après le théorème précédent, on a alors la décomposition $H = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f)^\perp$. Comme $\text{Ker}(f) \neq H$, on a $\text{Ker}(f)^\perp \neq \{0\}$. Considérons alors un élément h non nul dans $\text{Ker}(f)^\perp$. Pour $x \in H$, on a naturellement $x - \frac{f(x)}{f(h)}h \in \text{Ker}(f) \implies \langle x - \frac{f(x)}{f(h)}h, h \rangle = 0$. En développant l'expression ci-dessus, on a donc :

$$\langle x, h \rangle = \langle \frac{f(x)}{f(h)} h, h \rangle = \frac{f(x)}{f(h)} \|h\|^2 \implies f(x) = \langle x, \frac{\overline{f(h)}}{\|h\|^2} h \rangle$$

Le vecteur $a = \frac{\overline{f(h)}}{\|h\|^2} h$ convient donc. Montrons pour finir qu'il est unique. Pour ce faire, supposons qu'il existe $a' \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $f(x) = \langle x, a' \rangle$. On a alors :

$$\forall x \in H, \langle x, a' \rangle = \langle x, a \rangle \implies \forall x \in H, \langle x, a' - a \rangle = 0$$

Ainsi $a - a' \in H^\perp = \{0\}$, ce qui nous donne l'unicité. $\square$

Remarque 1. Si H est hilbertien complexe, l'application $x \mapsto \langle a, x \rangle$ n'est pas linéaire, mais semi-linéaire d'où l'importance de placer l'élément a à droite dans l'écriture $\langle x, a \rangle$.

Application 1. Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe une unique application $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ appelée l'adjoint de T telle que :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \langle T(x), y \rangle_F = \langle x, T^*(y) \rangle_E$$

et de plus $\|T\| = \|T^*\|$.

Démonstration. :

Étape 1 : Pour tout $y \in F$, considérons l'application $\phi_y : x \mapsto \langle T(x), y \rangle$. Montrons que ϕ_y est linéaire continue et qu'il existe un unique $z \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \phi_y(x) = \langle T(x), y \rangle = \langle x, z \rangle$$

D'abord ϕ_y est clairement linéaire par linéarité de T et linéarité à gauche de $\langle, \rangle$. Puis ϕ_y est continue par continuité de T et l'inégalité de Cauchy-Schwartz. En effet, on a :

$$|\phi_y(x)| = |\langle T(x), y \rangle| \leq \|T(x)\| \times \|y\| \leq \|T\| \times \|x\| \times \|y\|$$

et donc en posant $C = \|T\| \times \|y\|$, on a $|\phi_y(x)| \leq C\|x\| \implies \phi_y$ est continue. D'après le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il existe alors un unique vecteur noté $T^*(y)$ tel que :

$$\forall x \in E, \phi_y(x) = \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

Par l'unicité de $T^*(y)$ pour un y donné, on définit une application $T^* : F \longrightarrow E$.

Étape 2 : montrons que T^* est linéaire. Soient $y_1, y_2 \in F$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle &= \langle T(x), \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda_1} \langle T(x), y_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle T(x), y_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda_1} \langle x, T^*(y_1) \rangle + \overline{\lambda_2} \langle x, T^*(y_2) \rangle \\ &= \langle x, \lambda_1 T^*(y_1) + \lambda_2 T^*(y_2) \rangle \end{aligned}$$

D'où pour tout $x \in E$, $\langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle - \langle x, \lambda_1 T^*(y_1) + \lambda_2 T^*(y_2) \rangle = 0$ et finalement :

$$\langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 T^*(y_1) - \lambda_2 T^*(y_2) \rangle = 0$$

Ainsi, $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 T^*(y_1) - \lambda_2 T^*(y_2) \in E^\perp = \{0\}$ et T^* est linéaire.

Étape 2 : Montrons que T^* est continue. Pour $x \in E$ et pour tout $y \in F$, on a :

$$|\langle x, T^*(y) \rangle| = |\langle T(x), y \rangle| \leq \|T\| \times \|x\| \times \|y\| \quad (\nabla)$$

Comme $\|\cdot\|$ découle d'un produit scalaire, on a $\|T^*(y)\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, T^*(y) \rangle|$ et par (∇) on

a $\|T^*(y)\| \leq \|T\| \times \|y\|$ ce qui nous donne T^* est continue et en particulier $\|T^*\| \leq \|T\|$. En utilisant l'unicité de l'adjoint on montre facilement que : $(T^*)^* = T$ et ainsi on en déduit que :

$$\|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\| \text{ puis } \|T\| = \|T^*\|.$$

$\square$

Rappel 1. Pour E, F deux evn, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .

Référence : Topologie et analyse 3ème année. Georges Skandalis. Pages 252 à 254 et pour l'application à l'adjoint : page 261. Voir aussi Objectif Agregation pour un paragraphe consacré aux applications du théorème de projection sur un convexe fermé.