

Théorème: Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.Alors $\forall 1 \leq p \leq \infty$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est complet. $p < +\infty$:Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$. Alors il existe $(n_k)_k$ telle que $n_0 < \dots < n_k < \dots$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$.En effet, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\|f_n - f_{n_0}\|_p \leq \frac{1}{2^0} = 1$ donc pour $n_1 > n_0$, $\|f_{n_1} - f_{n_0}\|_p \leq \frac{1}{2^0} = 1$.
→ car $(f_n)_n$ est de Cauchy (prendre $\varepsilon = 1$)Supposons $n_0 < \dots < n_k$ construite tq $\forall n_0 \leq j < k$, $\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq \frac{1}{2^j}$.Soit $N > n_k$ tq $\forall n \geq N$, $\|f_n - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$ donc pour $n_{k+1} > n_k$, $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$.Alors, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\left\| \sum_{k=0}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_p \leq \sum_{k=0}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k} \leq 2$.
→ car $(f_n)_n$ est de Cauchy (prendre $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$)

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \int_X \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right)^p d\mu &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_X \left(\sum_{k=0}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right)^p d\mu \\ &\stackrel{\text{borne de Fatou}}{=} \liminf_{N \rightarrow \infty} \|g_N\|_p^p \\ &\leq 2^p < +\infty \end{aligned}$$

$$\text{D'où, } \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right)^p < +\infty \mu\text{-pp} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < +\infty \mu\text{-pp.}$$

Donc $\exists A \in \mathcal{A}$ tq $\mu(A) = 0$ et pour tout $t \in A^c$, $\sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t))$ converge absolument.Posons $f(t) = \begin{cases} f_{n_0}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)) & \text{si } t \in A^c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors f est mesurable et $f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(t)$, $\forall t \in A^c$.
→ car limite simple de fct mesurablesMontrons que $f \in L^p$ et que $f_n \xrightarrow{L^p} f$: Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_n$ est de Cauchy, $\exists N \geq 0$ tq $\forall n, j \geq N$, $\|f_n - f_j\|_p \leq \varepsilon$.

$$\text{D'où, } \forall j \geq N, \text{ par la borne de Fatou, } \int_X |f - f_j|^p d\mu = \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k} - f_j|^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_k} - f_j|^p d\mu = \|f_{n_k} - f_j\|_p^p \leq \varepsilon^p \leq \varepsilon^p < +\infty$$

Donc $f - f_j \in L^p$ donc $f = (f - f_j) + f_j \in L^p$ et puisque ε est arbitraire, $f_n \xrightarrow{L^p} f$. $p = +\infty$: Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$.Posons $A = \bigcup_{n \geq 1} \{ |f_n| > \|f_n\|_\infty \} \cup \bigcup_{n \geq 1} \{ |f_n - f_p| > \|f_n - f_p\|_\infty \}$. Alors $\mu(A) = 0$ comme union dénombrable d'ensembles de mesure nulle. Posons $B = A^c$. Alors $(f_n|_B)_n$ est encore une suite de Cauchy de L^∞ , à valeurs dans $\mathbb{C}$ complet.Elle converge donc simplement vers une fonction mesurable f sur B . On pose $f = 0$ sur A .Alors: $f \in L^\infty$ car $(f_n)_n$ est bornée dans L^∞ car de Cauchy, donc $\exists N > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leq N$.

$$\text{D'où } \forall x \in B, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \leq N \Rightarrow |f(x)| \leq N, \forall x \in B$$

$$\bullet f_n \xrightarrow{L^\infty} f \text{ car } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

$$\text{D'où } \forall x \in B, \forall m, n \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \forall x \in B, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty = \|f_n|_B - f\|_\infty \leq \varepsilon$$