

Proposition: Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et f analytique sur Ω i.e. $\forall z_0 \in \Omega, \exists R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ et $\forall z \in D(z_0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$.
 Alors f est holomorphe sur $D(z_0, R)$ et $\forall z \in D(z_0, R), f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$.

Quitte à poser $g(z) = f(z+z_0)$, on peut supposer que $z_0 = 0$.

Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} z^n$ ont même rayon de convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} z^n$ est bien définie sur $D(0, R)$.
 Soit $a \in D(0, R)$. Montrons que f est dérivable en a et $f'(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n a^{n-1}$.

Pour $z \in D(0, R) \setminus \{a\}$, on a :

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{z - a} (z^n - a^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z) \text{ où } g_n(z) = a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k a^{n-1-k}$$

Soit $r > 0$ tel que $|a| < r < R$. Alors : $\sup_{|z| < r} |g_n(z)| \leq |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} r^k r^{n-1-k} = n |a_n| r^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 1} n |a_n| r^{n-1}$ est $< +\infty$ car $r < R$.

D'où $\sum_{n \geq 1} g_n(z)$ est normalement convergente sur $D(0, r)$.

Ainsi, $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{z \rightarrow a} g_n(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n a^{n-1}$ car $g_n(a) = a_n \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-1-k} = n a_n a^{n-1}$.

D'où f est $\mathbb{C}$ -dérivable en a et $f'(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n a^{n-1}$. Ainsi f est holomorphe sur $D(0, R)$.

Théorème: Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $D(a, r) \subset \Omega$ paramétrisé par $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + re^{it}$.

Alors $\forall z \in D(a, r), f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$.
 En particulier, f est analytique sur Ω .

① Soit $R > r$ tel que $\Omega_n := D(a, R) \subset \Omega$ et soit $z \in D(a, r)$. On considère $g: \zeta \mapsto \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{si } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{sinon} \end{cases}$.
 Alors g est continue sur Ω_n par construction et est holomorphe sur $\Omega_n \setminus \{z\}$.

Puisque Ω_n est un ouvert convexe, par le théorème de Cauchy sur un convexe,

$$\int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = 0 \text{ i.e. } \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \underbrace{\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{= 2i\pi \text{Ind}_{\gamma}(z) = 2i\pi} = 0 \text{ i.e. } f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

par exemple $r = \frac{d}{2}$

② Soit $d := d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$ car $a \in \Omega$ ouvert. Soit $r < d$ tel que $D(a, r) \subset \Omega$ et $z \in D(a, r)$.

D'après ①, $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta-a})} d\zeta$

où $\zeta - a \neq 0$ car $\zeta \in \Gamma_n(\gamma)$ donc $|\zeta - a| = r > 0$.

De plus, $|z - a| < r$ car $z \in D(a, r)$. Donc $|\frac{z-a}{\zeta-a}| < 1$ et

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\zeta) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

en la variable ζ .

Or, $\sup_{\zeta \in \Gamma_n(\gamma)} |\frac{z-a}{\zeta-a}|^n = (\frac{|z-a|}{r})^n < 1$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{|z-a|}{r})^n$ converge normalement sur $\Gamma_n(\gamma)$.

On peut donc intervertir série et intégrale :

$$\forall z \in D(a, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n$$

Par unicité du développement en série entière, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$.